円周率の公式探索

松元 隆二
九州工業大学 情報工学部 技術部

平成 23 年 10 月 13 日

概 要

円周率 (3.141592653589···) は無限に続く数であり，古代より多くの数学者や計算機科学者を魅了している数である．松元もその一人である．円周率の高精度の数値計算は古代より行われていて，近年では 2010 年に長野県の市井の IT 技術者である近藤茂氏のグループにより自作 PC を用いて 5 兆桁の計算が行われた．これが執筆時点での世界記録である．

円周率を計算する公式は多数存在するが，その一つに，マチンの公式に代表される三角関数の arctan(アーク・タンジェント) を用いた公式がある．arctan を用いた公式の証明に必要な数学は高校数学程度であり，加えて，簡単に公式を探索 (発見) することができる．松元は 1996 年頃から暇を見て計算機を使った公式探索を行っている．

1 はじめに

円周率の公式の一つに，マチンの公式に代表される，三角関数 $t = \tan(\theta)$ の逆関数 $\theta = \arctan(t)$ を用いた式がある．このタイプの式は多数存在し，“arctan 関係式” などと呼ばれる．以下に代表的な式を挙げる．

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \arctan(\frac{1}{1}) = \arctan(1). \quad \text{三角関数の定義 } 1 = \tan(\pi/4) \text{ より} && (1.1)\\
&= 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}). \quad \text{1706 年, マチン, 円周率の “マチンの公式” として有名} && (1.2)\\
&= \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}). \quad \text{1730 年, オイラー} && (1.3)\\
&= 12\arctan(\frac{1}{18}) + 8\arctan(\frac{1}{57}) - 5\arctan(\frac{1}{239}). \quad \text{1863 年, ガウス} && (1.4)\\
&= 12\arctan(\frac{1}{49}) + 32\arctan(\frac{1}{57}) - 5\arctan(\frac{1}{239}) + 12\arctan(\frac{1}{110443}). \quad \text{1982 年, 高野喜久雄} && (1.5)\\
&= 44\arctan(\frac{1}{57}) + 7\arctan(\frac{1}{239}) - 12\arctan(\frac{1}{682}) + 24\arctan(\frac{1}{12943}). \quad \text{1896 年, ステルマー} && (1.6)
\end{aligned}$$

マチンの公式 (1.2) は 1949 年に最初期のコンピュータ ENIAC で 2037 桁の計算で用いられ当時の世界記録を樹立した．2002 年時点の円周率世界記録である 1.2 兆桁の計算は，東京大学 金田康正教授のグループが式 (1.5,1.6) を用いて樹立した．このように世界記録などにも用いられている arctan 関係式であるが，簡単に探索可能であるという顕著な性質を持っている．式 (1.5) は高校教師の高野喜久雄氏が雑誌 bit 紙上で発表した公式である [2]．松元は 1996 年頃から既知の公式より “収束が良い (早い) 式” が無いか探索を行っている．

“収束の良さ” についてであるが，arctan を数値計算する場合，多くの場合下記のテイラー級数を用いる．

$$\theta = \arctan(\frac{1}{x}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{2k+1}. \quad (1 \le |x|, \text{奇関数}) \tag{1.7}$$

三角関数の定義より得られる式 (1.1) が一番簡単な公式であるが，式 (1.1) はテイラー級数 (1.7) が $x = 1$ になるため $(1/x)^{2k+1}$ が常に 1 になる．そのため $(-1)^k/(2k+1)$ のみが残る。代入すると $1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7\cdots$ となり収束が非常に遅い．改善のためマチンの公式 (1.2) のように複数の項に分解を行なう．例えばマチンの公式の場合は x が 5 および 239 になるが，試しに $(1/x)^{2k+1}$ に代入すると $x = 5$ の場合 $(1/5)^1 = 0.2, \cdots, (1/5)^{11} = 2.048\cdot 10^{-8}$ であるが、これは $x = 1$ の場合にくらべてかなり早く収束する。x の値が大きいほど早くゼロに収束する．

本稿の主題である “円周率の公式探索” とは，$\arctan(1/x)$ において x の値が大きくて，かつ，arctan の項数が少ない式を探すのが目的である．

2 arctan 関係式の証明

arctan 関係式は tan の加法定理で証明ができるため，高校数学で証明が可能である．

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)}. \quad \text{tan の加法定理} \tag{2.1}$$

例えばオイラーの式 (1.3) は以下のように，三角関数の定義より得られる式 (1.1) に還元できる．

$$\arctan(1/2) = A, \arctan(1/3) = B \quad \therefore \quad \tan(A) = 1/2, \tan(B) = 1/3$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)} = \frac{(1/2) + (1/3)}{1 - (1/2) \cdot (1/3)} = 1 = \tan(\pi/4)$$
$$\tan(\pi/4) = 1 \quad \therefore \quad \arctan(1) = \pi/4$$

3 arctan 関係式の探索

私が行った主題の部分である．容易な方法として，tan の加法定理 (2.1) を用いて式 (1.1) に還元できる式を計算機で力業で探索すれば良い．例えば以下の arctan が 2 個の式の場合は，

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = p \cdot \arctan(\frac{1}{a}) + q \cdot \arctan(\frac{1}{b}).$$

変数 a,b,p,q を用いた 4 重の For 文のループのプログラムを作り，tan の加法定理 (2.1) を用いて式 (1.1) に還元出来るかを調べる．探索の原理はこれだけである．

しかし，素直にループでプログラムを作成すると，時間がすごくかかる．arctan が 2 個の場合は 4 重ループだから計算量が 4 乗比例 ($O(n^4)$) のためどうにかなるかもしれないが，arctan が 3 個の場合は 6 重ループ ($O(n^6)$)，4 個の場合は 8 重ループ ($O(n^8)$) になる．そのため，実際は色々な数学的性質を利用して制約をかけて探索する [2]．

松元は 1996 年にプログラミング言語 Prolog と計算機 Sun SPARC Station 20 を用いて以下の式を発見した．この式は松元が最初に発見した式のようである [3, 4]．つまり「松元隆二の公式」という事になる．

$$\frac{\pi}{4} = 16 \cdot \arctan(\frac{1}{21}) + 3 \cdot \arctan(\frac{1}{239}) + 4 \cdot \arctan(\frac{1}{343}) - 4 \cdot \arctan(\frac{1}{27493}). \quad \text{1996 年, 松元隆二}$$

但し，式 (1.5,1.6) より計算効率が悪い．

4 終わりに

最終目標としては，既知の式より計算効率が良い arctan 関係式を発見して，スーパーコンピュータが利用できる研究者に世界記録の更新に使って頂き，用いた公式の所に「松元隆二の公式」と書いて世界に発表してもらえたら光栄なのであるが，残念ながら，容易に探せる範囲には既知の公式より計算効率が良い arctan 関係式は無さそうである．

余談ながら多くの円周率愛好家は世界記録更新の実行の方に興味があるだろうが，こちらの方はプログラミングの難しさと予算の面で早々に諦めた．

参考文献

[1] オンライン辞典 Wikipedia の「マチンの公式」の欄, `http://ja.wikipedia.org/wiki/マチンの公式`

[2] 高野喜久雄,「π の arctangent relations を求めて」, bit, 1983 年 4 月, pp.83-91.

[3] COMPUTING PI: LISTS OF MACHIN-TYPE (INVERSE COTANGENT) IDENTITIES FOR PI/4, Michael Roby Wetherfield & Hwang Chien-lih, `http://www.machination.eclipse.co.uk/`

[4] 松元隆二, arctan 関係式一覧, 2000 年 3 月, `http://www.pluto.ai.kyutech.ac.jp/plt/matumoto/atan_table.txt`.