円周率の公式集

暫定版 $Ver.3.1415$

編集：松元隆二

2021 年 8 月 14 日

目 次

独自定義の数学記号

一般的な数学記号については，第 6.5 節をごらんください．

$R_s\left(n\right)$

Ramanujan 型級数の各項の係数．

$$R_s\left(n\right)=\frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2}+s)_n(\frac{1}{2}+s)_n}{(n!)^3}.$$

詳細は，第 6.6.7 節を見てください．

P_B(整数), $P_B(f(n))$:円周率の小数点以下の有効桁数

近似式が小数点以下何桁円周率と合っているかを示しています．

$$P_{10}(2)=\frac{22}{7}=3.14\dot{2}8\cdots$$
$$P_{10}(6)=\frac{355}{113}=3.141592\dot{9}2\cdots$$
$$P_2(13)=\frac{355}{113}=(11.0010010000111111\dot{1}0\cdots)_2.$$

B は何進数かを示します．省略した場合は $B=10$ です．何進数かによって有効桁数が異なります．2 進数と 10 進数では，約 $0.3(\doteq\log_{10}2)$ 倍有効桁数が異なります．$0.3P_2(f(n))\doteq P_{10}(f(n))$

円周率の公式に併記している場合は，公式の有効桁を示すパラメータ関数になってます．級数を n 項計算した場合，何桁正確な値を取るかを示します．この用法の場合は，正確な円周率の値とは桁数が幾つか前後します．

本公式集で掲載されている $P(n)$ の値は UBASIC[24] および自作の C++ の浮動小数 Class および LiDIA[1] を使用して確かめました．計算精度の関係上，2-3 項前後するかもしれません．

$$\frac{4}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}R_0\left(n\right)\cdot\frac{6n+1}{4^n}.\quad(P_{10}(0.6n)).$$

上記は級数を 1 項計算するたびに，0.6 桁づつ正確な値が求まるという意味です．

A_k, B_k, C_k, S_L

整数を値として取り，以下のように定義されています．

$$S_L=\sum_{k=0}^{L-1}\frac{\prod_{l=0}^{k-1}B_l}{\prod_{l=0}^{k}C_l}\cdot A_k.$$

詳細は，第 5 章を参照ください．

D_k, B'_k, C'_k, S_L

整数を値として取り，以下のように定義されています．

$$S_L=\sum_{k=0}^{L-1}\frac{\prod_{l=0}^{k-1}B'_l}{\prod_{l=0}^{k}C'_l}\cdot\frac{1}{D_k}.$$

詳細は，第 5 章，式 (5.8) を参照ください．

[1]（リンク切れ（2021/8/14））`http://www.informatik.tu-darmstadt.de/TI/LiDIA/Welcome.html`

第1章　円周率の公式

公式についての情報は，

“発見者 (生没年)[発見年]”

のようになっています．間違い，ご意見などございましたら，あとがきのメールアドレスまでご一報ください．

ほとんどの公式は，出典の文献では展開した形式で最初の 2-3 項だけ取り上げられていました．しかし本文では，一般項が推測できる式に関してはすべて $\sum,\prod$ 等を使い一般項の形式に直しています．理由は展開した形式では，次の項が容易に推測出来ないため，実際の計算に不都合だからです．

1.1　定義

$$\pi = \frac{\text{円周}}{\text{直径}} = 3.141592653589\cdots$$

無限に続く！

1.2　微分積分学以前

1.2.1　Archimedes of Syracuse (287-212BC)

Archimedes は，この式を発見していたと考えられています．

$$\text{初期値}\quad a_0 := 2\sqrt{3},\quad b_0 := 3,$$

$$a_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\quad b_{n+1} := \sqrt{a_{n+1}\cdot b_n},$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.\quad P(0.6n).$$

1.2.2　François Viète (1540-1603) [1593]

世界で初めて円周率の公式化に成功しました．Archimedes 以来の古典的な円の内接多角形を使った円周率の計算法を公式として表したものです．60 桁 99 項程度です．参考文献 [3, pp.99-100].

$$\frac{2}{\pi} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\right)\cdots$$

$$k_0 := \sqrt{\frac{1}{2}},\quad k_{n+1} := \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k_n},\quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=0}^{\infty} k_n.$$

1.2.3 John Wallis (1616-1703) [1665]

実際の計算には向かない．$P(\log_{10}(n))$．参考文献 [3, pp.138-139][67].

$$\frac{4}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{2n\cdot(2n+2)} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}.$$

次の式は同じ．

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

1.2.4 John Wallis (1616-1703)

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}}}}$$

このように分母の中に分数が含まれるのを連分数という。紙面を食うので、次のように略記する事が多い。

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\ \frac{1}{15+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{292+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \cdots.$$

係数だけ取り出して，以下のように書く．

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...].$$

Wallis は, Ludolph[1] が一生をかけて計算した 35 桁を使って以下の連分数を得た．参考文献 [2, p.93].

$$\begin{aligned}\pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3,\\ &\quad 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, ...].\end{aligned}$$

これは 32 項目から間違いである．正確な最初の 100 項をあげておく．

$$\begin{aligned}\pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3,\\ &\quad 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1,\\ &\quad 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1,\\ &\quad 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, ...].\end{aligned}$$

円周率の連分数には規則性はないと考えられている．

[1] Ludolph(Ludolh) van Ceulen (1539(40)-1610), 参考文献 [3, p.109], [2, p.61-66].

1.2.5 William Brouncker (1620-1684?)

参考文献 [3, pp.140-143].

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1^2}{2+}\ \frac{3^2}{2+}\ \frac{5^2}{2+}\ \frac{7^2}{2+}\ \cdots \frac{(2n+1)^2}{2+}\ \cdots.$$

1.2.6 James Gregory (1638-1675) [1671]

実際の計算には向かない．$P(\log_{10}(n))$．参考文献 [3, pp.143-144].

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \tag{1.1}$$

1.2.7 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) [1673]

この式は，Gregory の式 (1.1) と実質同じである．参考文献 [67].

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} \right) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \cdots \right).$$

(1999/3/17 追加)

1.3 微分積分学以後

1.3.1 Isaac Newton (1642-1727)

Newton は (実数に拡張された) 二項定理を使って様々な級数を作りました．なお，拡張された二項定理は Tayler 級数と実質同じ級数です．参考文献 [3, pp.153-156].

(a) 60 桁 96 項程度である．

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \cdots$$

この式は，$\sin^{-1}$ の Tayler 級数

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

において $x = 1/2$ としたものである．

(b) Newton は以下の式を使い 16 桁の計算を行った． 60 桁 92 項程度である．

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{72\cdot 2^9}-\cdots\right).\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{32}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)(2n+5)2^{4n}}\right). \qquad (1.2)\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}+24\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x-x^2}dx.\end{aligned}$$

1.3.2 Leonhard Euler (1707-1783) [1755]

参考文献 [2, pp.103-104], [3, p.169]. Euler は次の級数を 1755 年に発見した．

$$\begin{aligned}\tan^{-1}t &= \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n}(\frac{t^2}{1+t^2})^n=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(\frac{t^2}{1+t^2})^n.\\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^4+\cdots\right). \qquad (1.3)\end{aligned}$$

ここで，tan の加法定理により $\frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}$ が成り立つので，

$$t=\frac{1}{7},\quad \frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1}{50}=\frac{2}{100}.$$

$$t=\frac{3}{79},\quad \frac{t^2}{1+t^2}=\frac{9}{6250}=\frac{144}{100000}.$$

よって，

$$\tan^{-1}\frac{1}{7}=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{2}{100}\right)^n.$$

$$\tan^{-1}\frac{3}{79}=\frac{79}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{144}{100000}\right)^n.$$

$$\frac{\pi}{4}=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{2}{100}\right)^n+\frac{79}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{144}{100000}\right)^n.$$

この式は分母が 10 の指数倍なので，10 進数の計算で都合が良い．

1.3.3 Leonhard Euler (1707-1783)[1748]

Euler によるこれらの ζ(ゼータ) 関数と類似の関数は，s が整数の時は π の関係式を表す事があります．また，いろいろおもしろい証明法があるようである．たとえば，ベルヌーイ多項式をフーリエ変換することによっても得ることができる．参考文献 [65][26, p.82][3, pp.167-168].

定義式は以下の通りです． 結果は表 1.1 に揚げている．表中で $q=\tan\left(\frac{m}{2n}\pi\right)$ と置いている．三角関数が含まれるが $m\pi/(2n)=\pi/3,\pi/4,\pi/6$ などの値を取ると計算に使える．一部は著者が Mathematica 3.0 による計算結果を加えている．

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s},\quad (s>1).\quad (\zeta(\text{ゼータ})\text{ 関数})$$

$$f_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r}{(2k+1)^s},\quad r=\begin{cases}1 & s\text{ が偶数の時.}\\ (-1)^k & s\text{ が奇数の時.}\end{cases} \tag{1.4}$$

$$f_2(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{((2k+1)n-m)^s}+\frac{r}{((2k+1)n-m)^s}\right),\quad r=\begin{cases}1 & s\text{ が偶数の時.}\\ -1 & s\text{ が奇数の時.}\end{cases} \tag{1.5}$$

$$f_3(s)=\frac{1}{m^s}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{(2kn-m)^s}+\frac{1}{(2kn+m)^s}\right),\quad r=\begin{cases}1 & s\text{ が偶数の時.}\\ -1 & s\text{ が奇数の時.}\end{cases}$$

$$\frac{\pi\ \csc(\frac{m\,\pi}{n})}{n}=\frac{1}{m}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2m}{k^2\cdot n^2-m^2}.$$

$$\frac{1}{2\,m^2}-\frac{\pi\ \cot(\frac{m\,\pi}{n})}{2\,m\,n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot n^2-m^2}.$$

$$\frac{\pi\ \tan(\frac{m\,\pi}{2\,n})}{4\,m\,n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\cdot n^2-m^2}.$$

$$\frac{\pi\ \csc(p\,\pi)}{2\,p}-\frac{1}{2\,p^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2-p^2}.$$

1999/3/16 追加．参考文献 [25, p.108] より．

$$f_4(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s}.$$

1.3.4 Glaisher [1878]

参考文献 [2, pp.248-250].

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}.\quad \text{(a) 収束とても遅い.}$$

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}n}.\quad \text{(b) 60 桁 199 項.}$$

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.\quad \text{(c) 60 桁 205 項.}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}.\quad \text{(d) 60 桁 99 項.}$$

$$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}.\quad \text{(e) 60 桁 103 項.}$$

$$1-\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{\binom{2n}{n}(2n+1)}.\quad \text{(f) 60 桁 102 項.}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}n^2}.\quad \text{(g) 60 桁 190 項.}$$

表 1.1: ζ 関数と類似の関数

Euler の得た値の他に，Mathematica 3.0 の計算結果を加えている．

s	$\zeta(s)$	$f_1(s)$	$f_2(s)$	$f_3(s)$	$f_4(s)$
1	NG	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{q\,\pi}{2\,n}$	$\frac{\pi}{2\,q\,n}$	$\log(2)$
2	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{8}$	$\frac{\left(1+q^2\right)\,\pi^2}{4\,n^2}$	$\frac{\left(1+q^{-2}\right)\,\pi^2}{4\,n^2}$	$\frac{\pi^2}{12}$
3	NG	$\frac{\pi^3}{32}$	$\frac{q\,\left(1+q^2\right)\,\pi^3}{8\,n^3}$	$\frac{\left(1+q^2\right)\,\pi^3}{8\,q^3\,n^3}$	NG
4	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^4}{96}$	$\frac{\left(1+4\,q^2+3\,q^4\right)\,\pi^4}{48\,n^4}$	$\frac{\left(3+4\,q^2+q^4\right)\,\pi^4}{48\,q^4\,n^4}$	$\frac{7\,\pi^4}{720}$
5	NG	$\frac{5\,\pi^5}{1536}$	$\frac{q\,\left(2+5\,q^2+3\,q^4\right)\,\pi^5}{96\,n^5}$	$\frac{\left(3+5\,q^2+2\,q^4\right)\,\pi^5}{96\,q^5\,n^5}$	NG
6	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^6}{960}$	$\frac{\left(2+17\,q^2+30\,q^4+15\,q^6\right)\,\pi^6}{960\,n^6}$	$\frac{\left(15+30\,q^2+17\,q^4+2\,q^6\right)\,\pi^6}{960\,q^6\,n^6}$	$\frac{31\,\pi^6}{30240}$
7	NG	$\frac{61\,\pi^7}{184320}$	-	-	NG
8	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{17\,\pi^8}{161280}$	-	-	$\frac{127\,\pi^8}{1209600}$
9	NG	$\frac{277\,\pi^9}{8257536}$	-	-	NG
10	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	$\frac{31\,\pi^{10}}{2903040}$	-	-	$\frac{73\,\pi^{10}}{6842880}$

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}n^2}.\quad \text{(h) 収束とても遅い.}$$

$$\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)(2n+2)}.\quad \text{(i).}$$

$$\frac{\pi^2}{18}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{25}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.\quad \text{(j) 60 桁 90 項.}$$

$$\frac{\pi^2}{8}+\pi-\frac{13}{3}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}(n-1)^2 n}.\quad \text{(k) 60 桁 180 項.}$$

$$\frac{\pi^3}{48}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(2m-1)^2}\right].\quad \text{(l) 収束遅い.}$$

$$\frac{\pi^3}{3^4\cdot\sqrt{3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right].\quad \text{(m) 60 桁 99 項.}$$

$$\frac{\pi^4}{48}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}(2n+1)(n+1)}\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right].\quad \text{(n) 収束遅い.}$$

$$\frac{\pi^4}{1944}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)(2n+2)}\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right].\quad \text{(o) 60 桁 97 項.}$$

$$『k_2 := 12, \quad k_{n+1} := \frac{n+1}{4n+6} k_n, \quad l_1 := \frac{1}{4}, \quad l_{n+1} := l_n + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2(n+1)^2},$$

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k_n l_n}{n+1}, \quad \pi = 3\sqrt[6]{S}.』 \quad \text{(p) 60 桁 97 項.}$$

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right). \quad \text{(q) 収束遅い.}$$

1.4 江戸時代の日本人による公式

江戸時代の和算家達の活躍はめざましい．たとえば建部賢宏による正 1024 角形だけを使っての 43 桁の計算は，正直言って驚いた．参考文献 [26, pp.126-137].

1.4.1 建部賢弘 (1664-1739)

$$\pi^2 = 9(1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots).$$

この式は，Tayler 級数

$$\frac{(\sin^{-1}(x))^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

に $x = 1/2$ を代入したものである．

1.4.2 松永良弼 (1692-1744)

70 桁 110 項程度である．

$$\pi = 3(1 + \frac{1^2}{4\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \ldots).$$

なおこの式は，Newton 同様 $\sin^{-1}$ の Tayler 級数に 1/2 を代入したものである．

1.4.3 久留島義太 (?-1757)

参考文献 [2, p.196]. この式は，有効桁の 2/3 程度の精度しか出ない．

$$\text{初期値} \quad x_1 := 2,$$

$$x_{n+1} := 2^{2n+1} - 2^{n+1}\sqrt{4^n - x_n},$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + \frac{4}{3}(x_{n+1} - x_n)}.$$

1.5 逆正接関数 ($\tan^{-1}$) による公式

$\tan^{-1}$(逆正接関数．tan の逆関数．arctan と表記する事もある．) を使った公式は多数存在する．第 3 章にも一覧を挙げているが，ここでは代表的なものを紹介する．

$\tan^{-1}$ は Tayler 級数を使って計算する場合が多い．$\tan^{-1}$ による公式はプログラミングが容易であるので，初めて円周率のプログラムに挑戦される方はお勧めする．また著者は中学の時に Machin の公式 (1.6) を 10 桁電卓を使って 40 桁の計算を行なったことがある．

1.5.1 Abraham Sharp (1651-1742)

参考文献 [3, p.156]．$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ という関係を使っている．

$$\frac{\pi}{6}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^{n+1}}.$$

1.5.2 John Machin (1680-1751)[1706]

記録更新に何度も使われた．世界で初めて作られた汎用電子計算機 ENIAC での記録更新 [2] もこの公式で行われたようである．参考文献 [3, pp.156-157].

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{1.6}$$

1.5.3 Charles Huttion (1737-1823)[1776]

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}.\quad \frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}.$$

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}.\quad \frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{5}{99}.$$

1.5.4 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [1863]

$$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{18}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{1.7}$$

1.5.5 S.Klingenstierna [1730]

記録更新に使われた．第 1 項の分母が 10 であるので，10 進演算に向く．

$$\frac{\pi}{4}=8\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\tan^{-1}\frac{1}{515}. \tag{1.8}$$

[2] 表 6.1 参照．

1.5.6 F.C.M.Störmer [1896]

$$\frac{\pi}{4} = 44\tan^{-1}\frac{1}{57} + 7\tan^{-1}\frac{1}{239} - 12\tan^{-1}\frac{1}{682} + 24\tan^{-1}\frac{1}{12943}.$$

次の式は記録更新に使われた．第 1 項の分母が 8 であるので，2 進演算に向く．

$$\frac{\pi}{4} = 6\tan^{-1}\frac{1}{8} + 2\tan^{-1}\frac{1}{57} + \tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{1.9}$$

1.5.7 高野喜久雄 [1982]

収束の良い $\tan^{-1}$ 関係式は，18〜19 世紀の数学者達にほとんどを発見されてしまいました．ですが，まだ残された式はないだろうかという試みの記事を，雑誌 bit 誌上で高野喜久雄さんが書かれました [32].

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\frac{1}{49} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 5\tan^{-1}\frac{1}{239} + 12\tan^{-1}\frac{1}{110443}.$$

1.6 20 世紀以降

電子計算機以前の公式は，筆算で計算しやすいように，級数に現れる分数の分母が 10 の式が好まれた．しかし電子計算機が発達した現在では，級数で分母に 2 が現れる式や，高速乗算/除算/平方根アルゴリズムが使える第 1.8 章，第 1.9 章などの式が好まれている．

第 (1.6.2) 章の式や式 (1.10) を使うと，2 進数で途中の桁より計算が可能である (らしい)．先頭の桁より計算するのではなく，1 万桁目，1 億桁目などの途中の桁からです．だが著者にはよくアルゴリズムが判らないので参考文献 [74] を参考にしてほしい．

1.6.1 D.Bailey, P.B.Borwein, S.Plouffe.[1996]

参考文献 [74].

(a)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{1.10}$$

一般化すると，次のようです [80].

$$\begin{aligned}\pi \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4+8r}{8n+1} - \frac{8r}{8n+2} - \frac{4r}{8n+3} - \frac{2+8r}{8n+4} - \frac{1+2r}{8n+5} - \frac{1+2r}{8n+6} + \frac{r}{8n+7}\right),\\ &\quad\quad (r \in \mathrm{C}, r \neq -1).\end{aligned}$$

(b)

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{64^n}\left(\frac{16}{(6n+1)^2} - \frac{24}{(6n+2)^2} - \frac{8}{(6n+3)^2} - \frac{6}{(6n+4)^2} + \frac{1}{(6n+5)^2}\right).$$

(1999/3/9 追加．誤記修正 2021/7/29:分母の「$8n+5$」は「$6n+5$」の誤り)

(c)

$$\pi^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{16}{(8n+1)^2}-\frac{16}{(8n+2)^2}-\frac{8}{(8n+3)^2}-\frac{16}{(8n+4)^2}-\frac{4}{(8n+5)^2}-\frac{4}{(8n+6)^2}+\frac{2}{(8n+7)^2}\right).$$

(1999/3/9 追加)

1.6.2 Fabrice Bellard

(a) 参考文献 [78].

この公式を使って，1999 年 2 月に 40 兆桁目が計算された．現在は 1 千兆桁目の計算が協力者を募って行われている最中のようである [77].（1999/3/3 現在）

$$\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)4^n}-\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1024^n}(\frac{32}{4n+1}+\frac{8}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}).$$

(1999/3/3 追加)

(b) 参考文献 [78].(1999/3/3 追加)

$$\pi=\frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}(-\frac{2^5}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{2^8}{10n+1}-\frac{2^6}{10n+3}-\frac{2^2}{10n+5}-\frac{2^2}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}).$$

(c) 参考文献 [79]. (1999/3/9 追加)

$$\pi=\frac{1}{740025}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3p(n)}{\binom{7n}{2n}2^{n-1}}-20379280\right),$$

$$p(n)=-885673181n^5+3125347237n^4-2942969225n^3+1031962795n^2-196882274n+10996648.$$

1.6.3 Victor Adamchik, Stan Wagon

参考文献 [80].

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right). \tag{1.11}$$

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+r}{4n+1}-\frac{3r}{4n+2}+\frac{r-4}{4n+3}+\frac{r}{4n+4}\right),\quad (r\neq 0).$$

$$\pi\sqrt{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{4}{6n+1}+\frac{1}{6n+3}+\frac{1}{6n+5}\right).$$

$$\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{-12}{n+1}+\frac{384}{n+2}+\frac{45/2}{2n+1}-\frac{1215/2}{2n+3}\right).$$

$$\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{-238}{k+1}+\frac{285/2}{2k+1}-\frac{667/32}{4k+1}-\frac{5103/16}{4k+3}+\frac{35625/32}{4k+5}\right).$$

(1999/3/4 追加)

1.6.4 Kirby Urner [1995]

参考文献 [81], 約 70 桁 117 項です.

$$k_0 = 0, \quad h_0 = 2,$$
$$k_{n+1} = \sqrt{2 + k_n}, \quad h_{n+1} = \sqrt{2 - k_n}, \quad \pi = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (1 - \frac{k_n}{2}) 2^n.$$

1.7 Ramanujan 型級数

Ramanujan から始まる，次の形式の公式が多数知られている．

$$\frac{1}{\pi} = W \sum_{n=0}^{\infty} R_s\left(n\right) \cdot (X + Y \cdot n) \cdot Z^n.$$

公式は Type A,B,D,E,F 型 [3] に大別されます．W, X, Y, Z は定数．s は $0, 1/3, 1/4, 1/6$ のいずれかです．詳細は，第 4 章をごらんください．

Ramanujan は形式的な証明を残すのに疎い数学者だったようで，ほとんどが後世の人達が再証明したものです．

1.7.1 Srinivasa Ramanujan (1887-1920)[1914]

参考文献 [66], [2, pp.255-256], [34], [36].

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_0\left(n\right) \cdot \frac{6n+1}{4^n}. \quad \text{Type A}, N = 3.$$

$$\frac{16}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_0\left(n\right) \cdot \frac{42n+5}{64^n}. \quad \text{Type A}, N = 7.$$

$$\frac{32}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_0\left(n\right) \cdot \frac{(42\sqrt{5}+30)n + (5\sqrt{5}-1)}{64^n} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}. \quad \text{Type A}, N = 15.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{1/4} \cdot \pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_0\left(n\right) \cdot [12n + (3 - \sqrt{3})](2 - \sqrt{3})^{4n+1}. \quad \text{Type A}, N = 9.$$

$$\frac{2}{3\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_0\left(n\right) \cdot (-1)^n [28n + (7 - 2\sqrt{6})](\sqrt{3} - \sqrt{2})^{8n+2}. \quad \text{Type B}, N = 18.$$

$$\frac{27}{4\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/6}\left(n\right) \cdot (15n + 2) \left(\frac{2}{27}\right)^n. \quad \text{Type G}, s = 1/6, N = 4.$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/6}\left(n\right) \cdot (33n + 4) \left(\frac{4}{125}\right)^n. \quad \text{Type G}, s = 1/6, N = 5.$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{2\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/3}\left(n\right) \cdot (11n + 1) \left(\frac{4}{125}\right)^n. \quad \text{Type F-1}, N = 3.$$

[3] この Type は著者が分類しました．一般に認知されている分類ではありません．

$$\frac{85\sqrt{85}}{18\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/3}\left(n\right) \cdot (133n+8)\left(\frac{4}{85}\right)^{3n}. \quad \text{Type F-1}, N=7.$$

$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(-1)^n(20n+3)}{4^n}. \quad \text{Type E}, N=5.$$

$$\frac{16}{\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(-1)^n(28n+3)}{48^n}. \quad \text{Type E}, N=9.$$

$$\frac{72}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(-1)^n(260n+23)}{18^{2n}}. \quad \text{Type E}, N=13.$$

$$\frac{288}{\pi\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(-1)^n(644n+41)}{72^{2n}5^n}. \quad \text{Type E}, N=25.$$

$$\frac{3528}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(-1)^n(21460n+1123)}{882^{2n}}. \quad \text{Type E}, N=37.$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(8n+1)}{9^n}. \quad \text{Type D}, N=6.$$

$$\frac{9}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(10n+1)}{9^{2n}}. \quad \text{Type D}, N=10.$$

$$\frac{49}{3\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{(40n+3)}{49^{2n}}. \quad \text{Type D}, N=18.$$

$$\frac{198}{\pi\sqrt{11}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{280n+19}{99^{2n}}. \quad \text{Type D}, N=22.$$

次式は記録更新に使われた．70 桁 9 項程度である．

$$\frac{9801}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\left(n\right) \cdot \frac{26390n+1103}{99^{4n}}. \quad \text{Type D}, N=58. \tag{1.12}$$

1.7.2 J.M.Borwein, P.B.Borwein.

(a) 参考文献 [34]. 70 桁 3 項程度です．

$$\frac{1}{12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \cdot \frac{A+Bn}{C^{n+1/2}}. \quad \text{Type F-2}, N=427.$$

$$A = 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365,$$

$$B = 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750,$$

$$C = [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(a')　(a) の共役級数 [69, 68].

$$\frac{1}{7.12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \cdot \frac{A+Bn}{C^{n+1/2}}. \quad \text{Type ?.}$$

$$A = 212175710912\sqrt{61} - 1657145277365,$$

$$B = 13773980892672\sqrt{61} - 107578229802750,$$

$$C = [5280(236674 - 30303\sqrt{61})]^3.$$

(b)　参考文献 [73]. (注: 誤植が無いという自信がないので，元資料を参考にしてください．)

$$\frac{1}{12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \cdot \frac{A+Bn}{C^{n+1/2}}. \quad \text{Type F-2}, N = 1555.$$

$$\begin{aligned}
A &= 63365028312971999585426220 + 28337702140800842046825600 \cdot \sqrt{5} \\
&+ 384 \cdot \sqrt{5}(10891728551171178200467436212395209160385656017 \\
&\quad +4870929086578810225077338534541688721351255040 \cdot \sqrt{5})^{1/2}, \\
B &= 7849910453496627210289749000 + 3510586678260932028965606400 \cdot 5^{1/2} \\
&+ 2515968 \cdot \sqrt{3110}(6260208323789001636993322654444020882161 \\
&\quad +2799650273060444296577206890718825190235 \cdot \sqrt{5})^{1/2}, \\
C &= -214772995063512240 - 96049403338648032 \cdot \sqrt{5} \\
&- 1296 \cdot \sqrt{5}(10985234579463550323713318473 + 4912746253692362754607395912 \cdot \sqrt{5})^{1/2}.
\end{aligned}$$

1.7.3　D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky.

以下の公式は，1996 年の 80 億桁の計算に使われた．70 桁 5 項程度です．

$$\frac{1}{12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(3n)!(n!)^3} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{(640320^3)^{n+1/2}}. \quad \text{Type F-2}, N = 163. \tag{1.13}$$

1.7.4　Jörg Arndt

参考文献 [75]. (注: 誤植が無いという自信がないので，元資料を参考にしてください．)

(a)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{3J}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{3}{6})_n (\frac{5}{6})_n}{n!^3} \cdot \frac{A+Bn}{J^n}. \quad \text{Type F-3}, N = 190.$$

$$\begin{aligned}
A &= 21242668516504965 + 15020834958518500\sqrt{2} \\
&+ 2\sqrt{5}\sqrt{\left(45125096427586568251645610141659 + 31908261685643312902173585434250\sqrt{2}\right)}, \\
B &= 1839779353703421900 + 1300920456890691000\sqrt{2} \\
&\quad +24337404\sqrt{10}\sqrt{(1142912476713024496667 + 808161162586491705750)}, \\
J &= \left[71864175655 + 22725423252\sqrt{10} + 2808\sqrt{5}\sqrt{\left(261993316778681 + 82849561276216\sqrt{10}\right)}\right]^3.
\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})_n(\frac{2}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{n!^3} \cdot \frac{A+Bn}{X^{2n+1}}. \quad \text{Type D(?)}, N = 862.$$

$$\begin{aligned}
A &= \Big[4521962731044058367634998271455136035/4 + 7993776278485234586059121251125632 34\sqrt{2} \\
&\quad +12(177501275529092352030123773691820793452753907811908738706564912610572 19 \\
&\qquad +125512355595882988423683990447607925182640861637438719818763430325853 4\sqrt{2})^{1/2}\Big]^{1/2}, \\
B &= \Big[961776139508895348591544409130763610600 0 + 680078430230158868661625397342978215440 0\sqrt{2} \\
&\quad +52003425600\sqrt{2}(342045665867229031517310725375164691366406720471988305929 63 \\
&\qquad +241862809810185666065523098112557758518494565102168303995 22\sqrt{2})^{1/2}\Big]^{1/2}, \\
X &= 1670141896514232075 + 1180968660568974600\sqrt{2} \\
&\quad +2736\sqrt{2}\sqrt{\Big(372627201865017746341791564603 + 263487221293322577155951514850\sqrt{2}\Big)}.
\end{aligned}$$

1.8 AGMを使った公式

AGM(算術幾何平均，“Arithmetic Geometric Mean”) を使った公式が幾つか知られています．

Square AGMの公式のa_n, b_nをα_n,β_nと書いた場合，Quartic AGMのa_n,b_nとの間に$\alpha_{2n} = a_n^2, \beta_{2n} = b_n^2$という関係があります．証明は簡単ですので，興味のあるかたはどうぞ．

1.8.1 The Square AGM: by E.Salamin and R.P.Breant

この式は，頻繁に記録更新に使われている．1999年の2000億桁の計算にも使用された．参考文献 [63, 64, 6, 36]．70桁5項程度です．$P(2^n)$．

$$\begin{gathered}
\text{初期値は} \quad a_0 := 1, \quad b_0 := 1/\sqrt{2}, \\
a_{n+1} := \frac{(a_n + b_n)}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \\
\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^{n} 2^k (a_k^2 - b_k^2)}, \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\right), \\
\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n. \qquad (1.14)
\end{gathered}$$

精度は，

$$\pi - \pi_n \le \frac{\pi^2 2^{n+4} \exp(-\pi 2^{n+1})}{a_\infty^2} \quad \text{もしくは，} \quad \pi - \pi_n \le \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2}(\pi - \pi_n)^2.$$

以上の式は，以下のように変形して，実際の計算に使われる．

$$\begin{gathered}
\text{初期値は} \quad a_0 := 1, \quad b_0 := 1/\sqrt{2}, \quad t_0 := 1/4, \\
a_{n+1} := \frac{(a_n + b_n)}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad t_{n+1} := t_n - 2^n (a_n - a_{n+1})^2, \\
\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}.
\end{gathered}$$

追記 (1998/3/1): さらに次のように変形できるようです．参考文献 [49]．

$$\text{初期値は}\quad a_1 := (2+\sqrt{2})/4, \quad b_1 := 2^{-1/4}, \quad t_1 := (\sqrt{2}-1)/8,$$

$$a_{n+1} := \frac{(a_n+b_n)}{2}, \quad y := (a_{n+1}-b_n)^2, \quad t_{n+1} := t_n - 2^n y, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_{n+1}^2 - y},$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+b_n)^2}{4t_n}.$$

1.8.2 The Cubic AGM: by J.M.Borwein and P.B.Borwein

参考文献 [73]．$P(3^n)$.

$$\text{初期値は}\quad a_0 := 1, \quad b_0 := (\sqrt{3}-1)/2,$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n+2b_n}{3}, \quad b_{n+1} := \sqrt[3]{\frac{b_n(a_n^2+a_nb_n+b_n^2)}{3}},$$

$$\pi_n = \frac{3a_{n+1}^2}{1-\sum_{k=0}^{n} 3^k(a_k^2-a_{k+1}^2)}, \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n.$$

以上の式は，以下のように変形出来る．

$$\text{初期値は}\quad a_0 := 1, \quad b_0 := (\sqrt{3}-1)/2, \quad t_0 := 1,$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n+2b_n}{3}, \quad b_{n+1} := \sqrt[3]{\frac{b_n(a_n^2+a_nb_n+b_n^2)}{3}}, \quad t_{n+1} := t_n + (3^{n+1}-3^n)a_{n+1}^2,$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2}{1-(t_n-3^n a_n^2)}.$$

1.8.3 The Quartic AGM: by J.M.Borwein and P.B.Borwein

参考文献 [6, p.17]．$P(4^n)$.

$$\text{初期値は}\quad a_0 := 1, \quad b_0 := 2^{-1/4},$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt[4]{\frac{a_nb_n(a_n^2+b_n^2)}{2}},$$

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^4}{1-2\sum_{k=0}^{n} 4^k[a_k^4 - (\frac{a_k^2+b_k^2}{2})^2]}, \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n.$$

精度は，

$$\pi - \pi_n \le \frac{\pi^2 4^{n+2} \exp(-\pi 2^{2n+1})}{a_\infty^4}.$$

です．

1.9 Borwein 兄弟による反復公式

この節の式は J.M.Borwein と P.B.Borwein によって発見された．関数 $\alpha(n)$, $\lambda^*(n)$, $m(n)$ の定義と値は，第 4.1 節を御覧ください．

1.9.1 二次収束 (1)

$$\begin{aligned}
\text{初期値は}\quad x_0 &:= \sqrt{2}, \quad \pi_0 := 2+\sqrt{2}, \quad y_1 := 2^{1/4},\\
x_{n+1} &:= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n}+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right), \quad (n \geq 0)\\
y_{n+1} &:= \frac{y_n\sqrt{x_n}+1/\sqrt{x_n}}{y_n+1}, \quad (n \geq 1)\\
\pi_n &:= \pi_{n-1}\frac{x_n+1}{y_n+1}, \quad (n \geq 1)\\
\pi &= \lim_{n\to\infty}\pi_n; \quad (\pi_n > \pi_{n+1} > \pi).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

誤差は，$n > 0$ において，

$$\frac{3}{2}(y_{n+1}-x_{n+1}) \leq \pi_n - \pi \leq \frac{7}{4}(y_{n+1}-x_{n+1}).$$

および，

$$\pi_{n+1}-\pi \ll \frac{1}{10}(\pi_n-\pi)^2.$$

$n > 2$ においては，

$$\pi_n - \pi < 10^{-2^{n+1}}.$$

です．この式は 2 次の収束を示す．70 桁 5 項程度です．参考文献 [6].

以上の式は，以下のように変形すると，割算が減る．参考文献 [36].

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \sqrt{2}, \quad b_0 := 0, \quad p_0 := 2+\sqrt{2},\\
a_{n+1} &:= \frac{(\sqrt{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}})}{2}, \quad b_{n+1} := \frac{\sqrt{a_n}(1+b_n)}{a_n+b_n},\\
p_{n+1} &:= \frac{p_n b_{n+1}(1+a_{n+1})}{1+b_{n+1}}, \quad \pi = \lim_{n\to\infty}\pi_n. \quad (\pi_n > \pi_{n+1} > \pi)
\end{aligned}$$

1.9.2 二次収束 (2)

$$\begin{aligned}
\text{初期値は}\quad y_0 &:= 1/\sqrt{2}, \quad \alpha_0 := 1/2,\\
y_{n+1} &:= \frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{1+\sqrt{1-y_n^2}}, \quad \alpha_{n+1} := [(1+y_{n+1})^2\alpha_n] - 2^{n+1}y_{n+1},\\
\pi &= \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n.
\end{aligned}$$

この式は 2 次の収束を示す．70 桁 6 項程度です．

この式は一般に次のように表される．

$$\alpha_0 := \alpha(r), \quad k_0 := \lambda^*(r), \quad (r > 0)$$

$$k_{n+1} := \frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}}, \quad \alpha_{n+1} := (1+k_{n+1})^2\alpha_n - 2^{n+1}\sqrt{r}k_{n+1},$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n.$$

ここで， $r2^{2n} \geq 1$ の時，誤差は

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 2^n \sqrt{r}\exp(-2^n\sqrt{r}\pi).$$

1.9.3 三次収束 (1)

未チェック.

$$\alpha_0 := \alpha(r), \quad m_0 := m(r), \quad r > 0$$

$$m_{n+1} := \frac{[\sqrt[3]{(m_n^2-1)}+1]^2}{m_n}, \quad s_n := \frac{3}{m_n}, \quad \alpha_{n+1} := s_n^2\alpha_n - 3^n\sqrt{r}\frac{s_n^2+2s_n-3}{2},$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n.$$

ここで， $r3^{2n} \geq 1$ の時，誤差は

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 3^n \sqrt{r}\exp(-3^n\sqrt{r}\pi).$$

で表される．したがってこの式は 3 次の収束を示す．参考文献 [6].

1.9.4 三次収束 (2)

$$\text{初期値は} \quad \alpha_0 := 1/3, \quad s_0 := (\sqrt{3}-1)/2,$$

$$r_{n+1} := \frac{3}{1+2\sqrt[3]{(1-s_n^3)}}, \quad s_{n+1} := \frac{r_{n+1}-1}{2}, \quad \alpha_{n+1} := r_{n+1}^2\alpha_n - 3^n(r_{n+1}^2-1),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n.$$

この式は 3 次の収束を示す.

1.9.5 四次収束

この式は，頻繁に記録更新に使われている．1999 年の 2000 億桁の計算にも使用された．

$$\text{初期値は} \quad y_0 := \sqrt{2}-1, \quad \alpha_0 := 6-4\sqrt{2},$$

$$y_{n+1} := \frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}}, \quad \alpha_{n+1} := [(1+y_{n+1})^4\alpha_n] - 2^{2n+3}y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n. \tag{1.16}$$

この式は 4 次の収束を示す．70 桁 3 項程度です．この式は一般に次のように表される．参考文献 [6].

$$\alpha_0 := \alpha(r), \quad y_0 := \sqrt{\lambda^*(r)}, \quad (r > 0)$$

$$y_{n+1} := \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}}, \quad \alpha_{n+1} := (1 + y_{n+1})^4 \alpha_n - 4^{n+1}\sqrt{r} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2).$$

ここで， $4^{2n} r \geq 1$ の時，誤差は

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 4^n \sqrt{r} \exp(-4^n \sqrt{r} \pi).$$

である．よってこの式は 4 次の収束を示す.

追記 (1998/3/1): 実際の計算では，次のように変形して使われているそうです．参考文献 [49].

$$\text{初期値は} \quad a := 6 - 4\sqrt{2}, \quad y := 17 - 12\sqrt{2}, \quad x := 2$$

括弧内「〜」を必要な精度になるまで繰り返す。

$$「y := 1 - \frac{2}{1 + (1 - y)^{-1/4}}, \quad b := y^2, \quad w := (1 + 2y + b)^2,$$

$$a := a \cdot w - x(w - (1 + b)^2), \quad y := b^2, \quad x := 4x.」$$

$$\pi = \frac{1}{y}.$$

1.9.6 五次収束 (1)

$$\text{初期値は} \quad s_0 := 5(\sqrt{5} - 2), \quad a_0 := 1/2,$$

$$X := \frac{5}{s_n} - 1, \quad Y := (X - 1)^2 + 7, \quad Z := \sqrt[5]{\frac{X(Y + \sqrt{Y^2 - 4X^3})}{2}},$$

$$s_{n+1} := \frac{25}{s_n(Z + \frac{X}{Z} + 1)^2},$$

$$a_{n+1} := s_n^2 a_n - 5^n[\frac{s_n^2 - 5}{2} + \sqrt{s_n(s_n^2 - 2s_n + 5)}],$$

$$\pi = \lim_{n \to \infty} 1/a_n.$$

ここで， $r5^{2n} \geq 1$ の時，誤差は

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 5^n \sqrt{r} \exp(-5^n \sqrt{r} \pi).$$

である．よってこの式は 5 次の収束を示す．70 桁 3 項程度です.

1.9.7 五次収束 (2)

未チェック．この式は D.Hughes によって得られた．

$$初期値\alpha_0 := \alpha(r), \quad u_0 := \sqrt{\sqrt{\lambda^*(r)}}, \quad (r > 0)$$

次に u_{n+1} は，次の関係式を解いて求める．

$$u_{n+1}^6 - u_n^6 - 5(u_n u_{n+1})^2(u_n^2 - u_{n+1}^2) - 4u_n u_{n+1}[1 - (u_n u_{n+1})^4] = 0.$$

さらに次のように定義する．

$$x_n := 2u_n u_{n+1}^5, \quad y_n := 2u_n^5 u_{n+1}, \quad a_n := u_n^2 + 5u_{n+1}^2 + 2x_n,$$

$$b_n := 5u_n^2 + u_{n+1}^2 - 2y_n, \quad c_n := a_n/b_n,$$

$$\begin{aligned} d_n \quad := \quad & \frac{(1 - u_{n+1}^8)[5(u_{n+1}^2 + x_n) + c_n(y_n - u_{n+1}^2)]}{4a_n} + \\ & + \frac{(1 - u_n^8)[u_n^2 + x_n + 5c_n(y_n - u_n^2)]}{4b_n}. \end{aligned}$$

次の数列を計算する．

$$a_{n+1} := 5c_n a_n + 5^{n+1}\sqrt{r}(d_n + u_{n+1}^8 - c_n u_n^8).$$

ここで，$r7^{2n} \geq 1$ の時，誤差は

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 5^n \sqrt{r} \exp(-5^n \sqrt{r}\pi).$$

で表される．よってこの式は 5 次の収束を示す．

1.9.8 七次収束

未チェック．

$$初期値は \quad \alpha_0 := \alpha(r), \quad u_0 := \sqrt{\sqrt{\lambda^*(r)}}, \quad r > 0.$$

次に u_{n+1} は，次の関係式を解いて求める．

$$(1 - u_n^8)(1 - u_{n+1}^8) = (1 - u_n u_{n+1})^8.$$

さらに次のように定義する．

$$a_n := \frac{u_n u_{n+1}}{u_n u_{n+1} - u_{n+1}^8}, \quad b_n := \frac{7u_n u_{n+1}}{u_n^8 - u_n u_{n+1}},$$

$$s_n := b_n/a_n, \quad t_n := \frac{(1 - u_{n+1}^8)(49a_n - b_n) + (1 - u_n^8)(s_n - 1)b_n}{8}.$$

次の数列を計算する．

$$\alpha_{n+1} := s_n \alpha_n + 7^n \sqrt{r}(7 - s_n - t_n).$$

ここで，$r7^{2n} \geq 1$ の時，誤差は，

$$0 < \alpha_n - 1/\pi \leq 16 \cdot 7^n \sqrt{r} \exp(-7^n \sqrt{r}\pi).$$

である．したがってこの式は 7 次の収束を示す．参考文献 [6].

1.9.9　九次収束

$$\text{初期値は}\quad \alpha_0 := 1/3, \quad r_0 := (\sqrt{3}-1)/2, \quad s_0 := \sqrt[3]{(1-r_0^3)},$$

$$t = 1+2r_n, \quad u = \sqrt[3]{9r_n(1+r_n+r_n^2)}, \quad v = t^2+tu+u^2, \quad m = \frac{27(1+s_n+s_n^2)}{v},$$

$$\alpha_{n+1} := m\alpha_n + 3^{2n-1}(1-m), \quad s_{n+1} := \frac{(1-r_n)^3}{(t+2u)v}, \quad r_{n+1} := \sqrt[3]{1-s_{n+1}^3},$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n.$$

この式は 9 次の収束を示す.

1.9.10　反復公式 (未整理分)

他のと重なってないかチェックしてない分.

(a)　参考文献 [76, p.11]. $P(2^n)$.

$$a_n := \frac{1}{3}, \quad m_0 := 2,$$

$$m_n = \frac{4}{1+\sqrt{(4-m_{n-1})(2+m_{n-1})}}, \quad a_n = m_{n-1}a_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{3}(1-m_{n-1}),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(b)　参考文献 [76, p.14].

$$a_n := \frac{1}{3}, \quad s_1 := 2,$$

$$(s_n)^2 + (s_n^*)^2 = 1, \quad (1+3s_n)(1+3s_{n-1}^*) = 4, \quad a_n = (1+3s_n)a_{n-1} - 2^{n-1}s_n,$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(c)　参考文献 [76, p.17]. $P(4^n)$.

$$a_n := \frac{1}{3}, \quad s_1 := \sqrt{2}-1,$$

$$(s_n)^4 + (s_n^*)^4 = 1, \quad (1+3s_n)(1+3s_{n-1}^*) = 4, \quad a_n = (1+s_n)^4 a_{n-1} + \frac{4^n}{3}(1-(1+s_n)^4),$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(d)　参考文献 [76, p.19]. $P(3^n)$.

$$a_n := \frac{1}{3}, \quad s_1 := \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$(s_n)^3 + (s_n^*)^3 = 1, \quad (1+2s_n)(1+2s_{n-1}^*) = 3, \quad a_n = (1+s_n)^2 a_{n-1} + -4\cdot 3^{n-2}(1+s_n)s_n,$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}.$$

1.10 教えて頂いた式

以下 1998/4/9 追加：山田氏より教えて頂いた式．Applied Mathematics Letters より．

$$\frac{\pi^2}{2} = 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{16^n(2n+1)^2}.$$

山田氏の正誤の指摘を調査していたら偶然でて来た式 (^^; ;．式 (1.2) の類似式．

$$\frac{16-3\pi}{768} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)(2n+5)2^{5+2n}}.$$

1.11 そのた・不明

参考文献 [9, p.261], [6, p.385] など．

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}}. \quad \frac{\pi^2}{18} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.$$

$$\pi+3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}}. \quad \frac{2\pi^2}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\binom{2n}{n}}. \quad \frac{\pi-3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)(2n+2)}.$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}}+3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}. \quad \frac{\pi}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)16^n}. \quad \frac{17\pi^4}{3240} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}.$$

G は Catalan 定数．

$$\frac{8}{3}G - \frac{\pi}{3}\log(2+\sqrt{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\binom{2n}{n}}. \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right).$$

以下 1999/3/3 追加．参考文献 [25, p.108] より．

$$\frac{\pi^2-8}{16} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n+1)(2n+3))^2}.$$

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{355}{144} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n+1)(n+2)(n+3))^2}.$$

$$\frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(4n+1)^3}+\frac{1}{(4n+3)^3}\right).$$

以下 1999/3/6 追加．参考文献 [75, p30].

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3+}\ \frac{2^2}{5+}\ \frac{3^2}{7+}\ \frac{4^2}{9+}\ \frac{5^2}{11+}\cdots$$

$$\frac{6}{\pi^2-6} = 1 + \frac{1}{1+}\ \frac{1^2}{1+}\ \frac{1\cdot 2}{1+}\ \frac{2^2}{1+}\ \frac{2\cdot 3}{1+}\ \frac{3^2}{1+}\ \frac{3\cdot 4}{1+}\ \frac{4^2}{1+}\cdots$$

(以下 2001/9/3 修正: 分母の 3 乗が欠落)

$$\frac{12}{\pi^3} = 1 + \frac{1^4}{3+}\ \frac{2^4}{5+}\ \frac{3^4}{7+}\ \frac{4^4}{9+}\ \frac{5^4}{11+} \cdots$$

以下の式は再帰的に定義されている． 第 s 項から計算するには, $t_{s+1} = 0$ として，

$$\begin{aligned} t_n &:= \frac{n(2n-1)}{(3n+1)(3n+2)3} \cdot ((5n+3) + t_{n+1}), \\ \pi_s &:= 3 + t_1, \\ \pi &= \lim_{s\to\infty} \pi_s. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = 6(\pi - 3).$$

1999/3/6 追加　以下 Ramanujan(?) 参考文献 [75, p32].

$$\pi = 3\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot n}. \quad \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

第2章　円周率の近似公式

2.1　Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

参考文献 [3, p.189].

$$\pi \doteqdot \frac{3}{1}. \quad \pi \doteqdot \frac{22}{7}. \quad \pi \doteqdot \frac{333}{106}. \quad \pi \doteqdot \frac{355}{113}. \quad \pi \doteqdot \frac{103993}{33102}.$$

2.2　Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

参考文献 [2, p.255].

$$\pi \doteqdot \frac{19}{16}\sqrt{7}. \quad \pi \doteqdot \frac{7}{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{5}). \quad \pi \doteqdot \frac{99}{80}\cdot\frac{7}{7-3\sqrt{2}}.$$

$$\pi \doteqdot \frac{63}{25}\cdot\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}. \quad \pi \doteqdot \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}. \quad \pi \doteqdot \sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}. \quad \pi \doteqdot \frac{355}{113}(1-\frac{0.0003}{3533}).$$

$$\pi \doteqdot \frac{24}{\sqrt{142}}\log\left(\sqrt{\frac{10+11\sqrt{2}}{4}}+\sqrt{\frac{10+7\sqrt{2}}{4}}\right). \quad \pi \doteqdot \frac{12}{\sqrt{190}}\log\left((2\sqrt{2}+10)(3+\sqrt{10})\right).$$

以下 1999/3/6 追加。参考文献 [75]. p22.

$$\pi \doteqdot \frac{12}{\sqrt{22}}\log\left(\sqrt{2}+2\right). \quad \pi \doteqdot \frac{12}{\sqrt{130}}\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)(\sqrt{13}+3)\right).$$

$$\pi \doteqdot \frac{12}{\sqrt{310}}\log\left((\sqrt{2}+2)(\sqrt{5}+3)(5+2\sqrt{10}+\sqrt{20\sqrt{10}+61})\right).$$

$$\pi \doteqdot \frac{4}{\sqrt{522}}\log\left(\frac{1}{256}\sqrt{2}\left(\sqrt{29}+5\right)^3(11\sqrt{6}+5\sqrt{29})\left(\sqrt{5+3\sqrt{6}}+\sqrt{3}\sqrt{3+\sqrt{6}}\right)^3\right).$$

以下 2000/3/19 追加。次の数式は、整数に非常に近い値を持つ事が知られています。

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925\cdots$$

この数式を変形して、次の近似式が得られます。下線部まで正しい数値です。

$$\frac{\log(262537412640768744)}{\sqrt{163}} = 3.14159265358979323846264338327\underline{9}72\cdots$$

2.3　不明・その他

参考文献 [2, p.87].

$$\pi \doteq \sqrt{10}. \quad \pi \doteq 1.8 + 3\sqrt{0.2} = \frac{9+\sqrt{45}}{5}. \quad \pi \doteq \frac{13\sqrt{146}}{50}.$$

$$\pi \doteq \frac{13\sqrt{146}}{50} + \frac{7}{10^7}. \quad \pi \doteq \frac{501+80\sqrt{10}}{240}. \quad \pi \doteq \sqrt[4]{(9\frac{7}{22})^2 + (2\frac{16}{22})^2 + (1\frac{17}{22})^2}.$$

$$\pi \doteq 3 + \frac{\cos(\frac{\pi}{12}) + 0.45}{10}. \quad \pi \doteq \sqrt{2} + \sqrt{3}. \quad \pi \doteq \sqrt{51} - 4.$$

$$\pi \doteq \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3^2+6^2+13^2+15^2}{3^2+6^2+13^2+8^2}}. \quad \pi = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{439}{278}}. \quad \pi \doteq (\frac{\sqrt{30}+\sqrt{150}}{10})^2.$$

$$\pi \doteq (2(0.57+\sqrt{0.1}))^2. \quad \pi \doteq 4\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}. \quad \pi \doteq 1 + \sqrt{15} - \sqrt{3}.$$

$$\pi \doteq 4(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - 1. \quad \pi \doteq 3 + \sqrt{13} - \sqrt{12}. \quad \pi \doteq 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\pi \doteq 3 + \frac{\sqrt{2}}{10}. \quad \pi \doteq \frac{10+\sqrt{299}}{3}. \quad \pi \doteq \sqrt{13 + \frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}.$$

$$\pi \doteq \sqrt{1.3^2 + 2.86^2}. \quad \pi \doteq \sqrt{2.14^2 + 2.3^2}. \quad \pi \doteq 3.14\frac{0.005}{3.14}.$$

$$\pi \doteq 3.14\frac{10}{6279}. \quad \pi \doteq 3.14\frac{1000}{627883}. \quad \pi \doteq 3.14 + \frac{0.01}{0.28}(1 + \frac{0.1}{535}).$$

$$\pi \doteq 3.14 + \frac{0.01}{6.28}(1 + \frac{1}{5000}). \quad \pi \doteq \frac{3.14^2+50}{3.14}. \quad \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \doteq \sqrt{5^2 + (\frac{3}{4})^2} - \frac{17}{4}.$$

$$\frac{\pi}{4} \doteq 22\tan^{-1}\frac{1}{28} + \tan^{-1}\frac{1}{56544}. \quad \frac{\pi}{4} \doteq 3\frac{17}{120}.$$

第3章　$\tan^{-1}$ 関係式

円周率の計算に使われている公式の一種に，三角関数の $\tan^{-1}$ を加法定理を使って分解した式があります．有名な式では，次の Machin の公式があります．

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}.$$

本公式集ではこの形の公式を「$\tan^{-1}$ 関係式」と呼んでいる．

1970 年代までの電子計算機による円周率の計算記録は，ほとんどが $\tan^{-1}$ 関係式を使っていた．

だが現在では，E.Salamin と R.P.Breant の公式 (1.14) や Borwein 兄弟の 4 次収束の公式 (1.16) などの "楕円関数に由来する公式" が主に使われる．しかし $\tan^{-1}$ 関係式は,「手計算計算やプログラムが容易である」,「新しい関係式を探すのが簡単である」,「数千桁程度の短い桁なら "楕円関数に由来する公式" より速く計算できる」などの特徴がある．

本章では，$\tan^{-1}$ 関係式の解説・既知の公式の主な物を掲載し，新しい関係式の探し方を解説している．

3.1　公式の解説

三角関数の定義により

$$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

である．逆関数の $\tan^{-1}$ を使えば,

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

となる．$\tan^{-1}$ は後述の Tayler 級数等を使って数値計算すれば，容易に計算できる．$\tan^{-1} 1$ を計算すれば $\pi/4$ が計算できる．

だが一般には，$\tan^{-1} 1$ を直接計算する事はせず，三角関数の加法定理を使って分解した Machin の公式 (1.6) や，Klingenstierna の公式 (1.8) が使われる [1]．これの理由を説明する．

$\tan^{-1}(1/x)$ の数値計算には一般に以下の Tayler 級数が使われる．

$$\tan^{-1} \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}}. \tag{3.1}$$

$\tan^{-1} 1$ は $x = 1$ の場合である．この式を使って，小数点以下 l 桁の精度で $\tan^{-1}(1/x)$ を計算するのに必要な級数の項数を N とする．N は，級数の項の絶対値が 10^{-l} 以下になる値を取ればよい．したがって以下の式を N が満たせば良い．

$$\frac{1}{10^l} > \left| \frac{(-1)^N}{(2N+1)x^{2N+1}} \right|. \tag{3.2}$$

計算精度を小数点以下 1000 桁として，x の値によって N がどのように変化するか調べてみる．

$\tan^{-1} 1$ の場合は $x = 1$ であり，N は約 $(10^{1000})/2$ 項である．次に Machin の公式 (1.6) の項 $\tan^{-1}(1/5)$ の N を計算してみると約 716 項である．$\tan^{-1}(1/239)$ は約 210 項である．合計 926 項である．$\tan^{-1} 1$ の $(10^{1000})/2$ 項と比較すると計算が必要な級数の項数が大幅に激減した．

[1] これらの公式の証明は，第 3.4 章参照の事

一般に x の値が大きくなると必要な級数の項数が減少する．x はできるだけ大きい方が良い．但し余り大き過ぎると数値計算のプログラム上困難になってくる場合がある．214747 以下が良い [2]．

次に，式 (3.2) の近似式を導く．

両辺に $\log_{10}$ を適用し，整理すると以下のようになる．

$$l < \log_{10}(2N+1) + (2N+1)\log_{10} x. \tag{3.3}$$

$x = 1$ の場合は，$\log_{10} 1 = 0$ であるので，

$$N = \frac{10^l}{2} - 1. \quad (x = 1)$$

である．次に $x \neq 1$ の場合は解くのが面倒である．しかし $x \geq 2$ の時は $\log_{10}(2N+1) \ll (2N+1)\log_{10} x$ なので $\log_{10}(2N+1)$ を無視しても問題ない．整理すると必要な級数の項数は

$$N \doteqdot \frac{0.5l}{\log_{10} x}. \quad (x \geq 2) \tag{3.4}$$

で近似できる．

3.2 数値計算

$\tan^{-1}(1/x)$ の Tayler 級数 (3.1) の数値計算は，主に二つの方法が考えられる．記号 A_k, B_k, C_k, D_k, B'_k, C'_k, S_k については，第 5 章を御覧ください．

(a) 作業用のメモリが 2 本必要である．

$$D_k = (2k+1), \quad B'_k = -1, \quad C'_k = \begin{cases} x & (k=0) \\ x^2 & (0<k) \end{cases}, \quad \tan^{-1}\frac{1}{x} = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

(b) 作業用メモリは 1 本で十分だが，余計な乗算が入る．

$$A_k = 1, \quad B_k = -(2k+1), \quad C_k = \begin{cases} x & (k=0) \\ (2k+1)x^2 & (0<k) \end{cases}, \quad \tan^{-1}\frac{1}{x} = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

(c) (a) の方法を旧来の $O(n^2)$ のアルゴリズムで計算する場合，二つ以上の $\tan^{-1}(1/x)$ を同時に計算すると，D_k が括弧で括り出せる．

3.3 $\tan^{-1}$ 関係式一覧

$\tan^{-1}$ を使った式は，無限にあります．また，見つけるのも容易です．具体的方法は第 3.5 節および参考文献 [32, 10] を御覧ください．著者は計算機を使って 650 万個近くを発見しました．著者が得た全公式は [83] に掲載してあります．ここでは 2 項式は全 4 個の公式を掲載し，3・4・5・6 項式については，既知の主な公式のみを掲載します．なお，2 項式は既知の 4 つしか存在しない事が証明されてます [37]．

略号の説明をします．

- $\tan^{-1}(1/X)$ を `a(1/X)` と略記しています．

[2] 32bit CPU を使い C 言語でプログラミングした場合，商と余りを効率良く計算するなら 32bit/16bit の組合せが都合が良い．16bit 整数に 10 進 4 桁づつ入れて，$2^{32}/10^4 = 214748$.

表 3.1: 2 項式, 全 4 個.

n	k	$(\pi/4) \cdot k$	[PrimeList]
9256	1	`+4a(1/5)-a(1/239).`	[13]
16396	1	`+2a(1/3)+a(1/7).`	[5]
22526	1	`+2a(1/2)-a(1/7).`	[5]
27089	1	`+a(1/2)+a(1/3).`	[5]

表 3.2: 3 項式, 既知の 105 個より主な公式.

n	k	$(\pi/4) \cdot k$	[PrimeList]
8933	1	`+12a(1/18)+8a(1/57)-5a(1/239).`	[5,13]
8946	1	`+8a(1/10)-a(1/239)-4a(1/515).`	[13,101]
9666	1	`+4a(1/5)-2a(1/478)+a(1/54608393).`	[5,13,45697]
10187	1	`+5a(1/7)+4a(1/53)+2a(1/4443).`	[5,281]
10305	1	`+4a(1/5)-a(1/240)-a(1/57361).`	[13,57601]
10309	1	`+4a(1/5)-a(1/238)+a(1/56883).`	[5,13,11329]
10374	1	`+4a(1/5)-a(1/241)-a(1/28800).`	[13,113,257]
10382	1	`+4a(1/5)-a(1/237)+a(1/28322).`	[5,13,41,137]
10486	1	`+6a(1/8)+2a(1/57)+a(1/239).`	[5,13]
10555	1	`+4a(1/5)-2a(1/577)-a(1/1393).`	[5,13,197]
-	-	-	-
26611	2	`+3a(1/2)+a(1/5)-a(1/57).`	[5,13]
27746	1	`+2a(1/2)-a(1/5)+a(1/18).`	[5,13]
29300	1	`+a(1/2)+a(1/5)+a(1/8).`	[5,13]
29403	1	`+a(1/2)+a(1/4)+a(1/13).`	[5,17]

- 'n': 公式の良さを示す値です．小さいほど良い公式です． $\tan^{-1}(1/x)$ を Tayler 級数で計算した場合，10000 桁の精度を得るために必要な級数の項数を式 (3.4) に基づいて計算した値です．この項数を各 $\tan^{-1}$ について合計した値です．
- 'k': $\pi/4$ を k 倍した値がその行の式と等式になります．
- '[PrimeList]': 共通の素数．共通の素数の意味については，第 3.5 節を御覧ください．

3.4 既知の $\tan^{-1}$ 関係式の証明

既知の $\tan^{-1}$ 関係式を証明するために，$\tan^{-1}$ 関係式を一般化した次の等式を論議する．

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1} \frac{1}{x_n} = \frac{k\pi}{4}. \quad (c_n, x_n, k \text{ は整数．} \quad k, x_n > 0, c_n \neq 0.) \tag{3.5}$$

Machine の公式 (1.6) の場合は，$N = 2$, $x_1 = 5$, $x_2 = 239$, $c_1 = 4$, $c_2 = -1$, $k = 1$ である．

表 3.3: 4 項式, 既知の 3865 個より主な公式.

n	k	$(\pi/4)\cdot k$	[PrimeList]
7930	1	+44a(1/57)+7a(1/239)-12a(1/682)+24a(1/12943).	[5,13,61]
8172	1	+22a(1/28)+2a(1/443)-5a(1/1393)-10a(1/11018).	[5,157,197]
8554	1	+17a(1/23)+8a(1/182)+10a(1/5118)+5a(1/6072).	[5,53,373]
8900	1	+12a(1/49)+32a(1/57)-5a(1/239)+12a(1/110443).	[5,13,1201]
8982	1	+16a(1/21)+3a(1/239)+4a(1/343)-4a(1/27493).	[5,13,17,181]
9000	1	+16a(1/21)+3a(1/239)+4a(1/353)+4a(1/21637).	[5,13,17,733]
9066	3	+44a(1/18)-23a(1/239)+8a(1/682)-16a(1/12943).	[5,13,61]
9067	1	+17a(1/22)+3a(1/172)-2a(1/682)-7a(1/5357).	[5,61,97]
9079	1	+11a(1/14)+2a(1/443)-5a(1/1393)+a(1/11018).	[5,157,197]
9106	1	+16a(1/21)+7a(1/239)-4a(1/616)+4a(1/3141).	[13,17,101]
-	-	-	-
33328	1	+a(1/2)+2a(1/4)-a(1/6)-a(1/327).	[5,17,37]
33441	1	+2a(1/2)-a(1/4)+a(1/8)-a(1/47).	[5,13,17]
34127	2	+2a(1/2)+a(1/4)+2a(1/5)+a(1/268).	[5,13,17]
34233	1	+a(1/2)+a(1/4)+a(1/8)-a(1/21).	[5,13,17]

表 3.4: 5 項式, 既知の 182723 個より主な公式.

n	k	$(\pi/4)\cdot k$	[PrimeList]
8268	1	+44a(1/109)+95a(1/239)-12a(1/682)+24a(1/12943) -44a(1/6826318).	[5,13,61,457]
8365	1	+88a(1/114)+7a(1/239)-12a(1/682)+24a(1/12943) -44a(1/740943).	[5,13,41,61,317]
8371	1	+76a(1/114)+7a(1/239)+24a(1/268)-12a(1/247057) -32a(1/740943).	[5,13,17,41,317]
8402	1	+61a(1/72)-29a(1/682)-27a(1/1483)-7a(1/9932) -10a(1/29718).	[5,17,61,761]
-	-	-	-
37550	1	+a(1/2)+2a(1/4)-a(1/5)+a(1/30)-a(1/242).	[5,13,17,53]
37789	2	+3a(1/2)+a(1/4)-a(1/6)+a(1/10)+a(1/2818).	[5,17,37,101]
38034	1	+a(1/2)+a(1/4)+a(1/6)-a(1/11)+a(1/438).	[5,17,37,61]
38165	1	+a(1/2)+a(1/4)+a(1/6)-a(1/12)-a(1/191).	[5,17,29,37]

表 3.5: 6 項式, 既知の 6341821 個より主な公式.

n	k	$(\pi/4)\cdot k$	[PrimeList]
8228	1	+227a(1/239)-156a(1/2072)-276a(1/2943)+200a(1/11389)	[5,13,41,257,941]
		-212a(1/16432)+100a(1/3970923).	
8319	1	+322a(1/577)+76a(1/682)+139a(1/1393)+156a(1/12943)	[5,13,61,89,197]
		+132a(1/32807)+44a(1/1049433).	
8398	1	+127a(1/239)+188a(1/515)-120a(1/1068)+88a(1/41218)	[5,13,73,101,709]
		-144a(1/173932)+88a(1/3539232).	
8424	1	+322a(1/408)+76a(1/682)-183a(1/1393)+156a(1/12943)	[5,13,61,89,197]
		+132a(1/32807)+44a(1/1049433).	
-	-	-	-
43355	2	+2a(1/2)+a(1/4)+a(1/5)+a(1/6)+a(1/28)+a(1/3583).	[5,13,17,37,157]
43453	2	+2a(1/2)+a(1/4)+a(1/5)+a(1/9)+a(1/11)-a(1/5257).	[5,13,17,41,61]
43849	1	+a(1/2)+a(1/4)+a(1/5)-a(1/6)+a(1/23)+a(1/931).	[5,13,17,37,53]
44298	2	+4a(1/2)+a(1/4)-a(1/5)-a(1/6)-2a(1/12)+a(1/18543).	[5,13,17,29,37]

3.4.1 tan の加法定理を使った方法

三角関数 $\tan^{-1}$ は次の加法定理が成り立ちます。

$$\tan^{-1}\frac{1}{x_a} \pm \tan^{-1}\frac{1}{x_b} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x_a} \pm \frac{1}{x_b}}{1 \mp \frac{1}{x_a}\frac{1}{x_b}}\right). \tag{3.6}$$

証明 [三角関数 $\tan^{-1}$ の加法定理] 三角関数 tan は次の加法定理が成り立ちます。

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)}.$$

$A = \tan^{-1} 1/x_a$, $B = \tan^{-1} 1/x_b$ と置くと次のように表せる。

$$\tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_a} \pm \tan^{-1}\frac{1}{x_b}) = \frac{\tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_a}) \pm \tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_b})}{1 \mp \tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_a})\tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_b})}.$$

$\tan(\tan^{-1}(X)) = X$ だから,

$$\tan(\tan^{-1}\frac{1}{x_a} \pm \tan^{-1}\frac{1}{x_b}) = \frac{\frac{1}{x_a} \pm \frac{1}{x_b}}{1 \mp \frac{1}{x_a}\frac{1}{x_b}}.$$

両辺に $\tan^{-1}$ を適用して,

$$\tan^{-1}\frac{1}{x_a} \pm \tan^{-1}\frac{1}{x_b} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x_a} \pm \frac{1}{x_b}}{1 \mp \frac{1}{x_a}\frac{1}{x_b}}\right).$$

三角関数 $\tan^{-1}$ の加法定理が証明された.

以上.

次に式 (3.5) の $k=1$ の場合のみを考える．繰り返しになるが $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ であるので，式 (3.5) は

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1} \frac{1}{x_n} = \tan^{-1} 1$$

と表す事ができる．左辺を加法定理 (3.6) を使い $\tan^{-1} 1$ に還元できれば，式 (3.5) の $k=1$ の場合を証明できる．次に，$k \geq 2$ の場合は多少厄介な問題があります．$k=2$ の場合は

$$\lim_{n \to +0} \tan(\frac{2\pi}{4} + n) = -\infty, \quad \lim_{n \to -0} \tan(\frac{2\pi}{4} + n) = +\infty.$$

であるため，無限大を考慮した計算を行う必要がある．煩雑なので，$k \geq 2$ の場合は後述の複素数を使った方法を勧める．

例： Machin の公式 (1.6) は以下のように計算できる．

$$2 \cdot \tan^{-1} \frac{1}{5} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} \right) = \tan^{-1} \frac{10}{24},$$

$$4 \cdot \tan^{-1} \frac{1}{5} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{10}{24} + \frac{10}{24}}{1 - \frac{10}{24} \cdot \frac{10}{24}} \right) = \tan^{-1} \frac{240}{238},$$

$$4 \cdot \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \tan^{-1} \frac{240}{238} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{240}{238} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{240}{238} \cdot \frac{1}{239}} \right) = \tan^{-1} \frac{1}{1}.$$

$\tan^{-1} 1$ に還元できた．

以上．

3.4.2 複素数を使った方法

予備知識として，指数関数と三角関数には,「Euler の恒等式」

$$\exp(xi) = \cos(x) + i \sin(x). \quad (i \text{ は虚数単位.}) \tag{3.7}$$

という関係がある． 次に C を任意の整数とすると，三角関数の周期性により，

$$\exp((x + 2C\pi)i) = \exp(xi).$$

が成り立つ．次に，式 (3.7) を使うと

$$\tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{i}{2} \log \frac{x - i}{x + i} + C\pi. \tag{3.8}$$

という関係が導く事ができる．

予備知識はここまでにして，本題の次の式を考える．

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1} \frac{1}{x_n} = \frac{k\pi}{4}. \quad (c_n, x_n, k \text{ は整数.} \quad k, x_n > 0, c_n \neq 0.) \tag{3.9}$$

この式は，式 (3.8) を使うとように表す事ができる．

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1} \frac{1}{x_n} = \frac{i}{2} \log \frac{\prod_{n=1}^{N} (x_n - i)^{c_n}}{\prod_{n=1}^{N} (x_n + i)^{c_n}} + C\pi = \frac{k\pi}{4}.$$

整理して，

$$\log \frac{\prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n}}{\prod_{n=1}^{N}(x_n + i)^{c_n}} = \frac{2}{i}(\frac{k\pi}{4} + C\pi) = -i(\frac{k\pi}{2} + 2C\pi).$$

両辺に指数関数 exp を適用すると，

$$\frac{\prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n}}{\prod_{n=1}^{N}(x_n + i)^{c_n}} = \exp(-\frac{k\pi}{2}i). \tag{3.10}$$

が導かれる．

続いて，この式が成り立つ条件を調べる．まず，$k \bmod 4 = 1$ の場合を調べてみる．

三角関数の周期性により式 (3.10) は，$k \bmod 4 = 1$ の時は必ず $-i$ となる．

$$\frac{\prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n}}{\prod_{n=1}^{N}(x_n + i)^{c_n}} = -i. \tag{3.11}$$

式 (3.11) の分子を実数 a, b を使って，$a + bi$ と置く．

$$\prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n} = a + bi.$$

分母は分子の共役複素数になっている．よって分母は，$a - bi$ になる．

$$\prod_{n=1}^{N}(x_n + i)^{c_n} = a - bi.$$

上記をまとめると式 (3.11) は次のようになる．

$$\frac{a + bi}{a - bi} = -i, \quad a + bi = -i(a - bi).$$

この等式が成り立つ条件は $a = b$ である．

したがって，$k \bmod 4 = 1$ の時，式 (3.9) が成り立つには，次の条件を満たす必要がある．

$$z = \prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n} \quad \text{と置くと，} \quad RE(z) = -IM(z).$$

この論議では，$k \bmod 4 = 1$ という条件で考えたため，4 の定数倍を無視している．k の値が，$k \pm 4, k \pm 8$ 等でも上記の条件を満たしてしまう．よって数値計算して，等式 (3.9) を満たしているかを調べてみる必要がある．この数値計算は，C や Fortran などの組み込み関数の精度で十分である．

同様の論議を $k \bmod 4 = 0, 2, 3$ について行うと，全体として次のようにまとめられる．

定理　$\tan^{-1}$ に関する等式

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1}\frac{1}{x_n} = \frac{k\pi}{4}. \quad (c_n, x_n, k \text{ は整数．} \quad k, x_n > 0.)$$

が成り立つ条件は，

(i) $z = \prod_{n=1}^{N}(x_n - i)^{c_n}$ とおいた場合，k の値によって，z が次の条件を満たす時である．

$$\begin{aligned}
&k \bmod 4 = 1 \quad \text{の場合は} \quad RE(z) = -IM(z). \quad (\exp(-\frac{k\pi}{2}i) = -i)\\
&k \bmod 4 = 2 \quad \text{の場合は} \quad RE(z) = 0. \quad (\exp(-\frac{k\pi}{2}i) = -1)\\
&k \bmod 4 = 3 \quad \text{の場合は} \quad RE(z) = IM(z). \quad (\exp(-\frac{k\pi}{2}i) = i)\\
&k \bmod 4 = 0 \quad \text{の場合は} \quad IM(z) = 0. \quad (\exp(-\frac{k\pi}{2}i) = 1)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(ii) 数値計算を行い，等式が成り立っているかを調べる．この数値計算は，C や Fortran などの組み込み関数の精度で十分である．

以上 2 つが成立する事である [3]．

以上．

本定理は，煩雑な tan の加法定理を使わずに等式を証明できる利点がある．

例：Klingenstierna の公式 (1.8) の場合は，$N = 3,\ x_1 = 10,\ x_2 = 239,\ x_3 = 515,\ c_1 = 8,\ c_2 = -1,\ c_3 = -4,\ k = 1$ である．

$$z = (10 - i)^8 \cdot (239 - i)^{-1} \cdot (515 - i)^{-4} = \frac{1}{228488} - \frac{i}{228488}$$

$$RE(z) = -IM(z) \quad \text{を満たしている．}$$

$$8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515} \doteq 0.785398\cdots \doteq \frac{\pi}{4}.$$

以上．

3.5 $\tan^{-1}$ 関係式の探し方

本章は，参考文献 [32] より「Störmer の方法」に沿って解説しています．他に,「連鎖探索法 [4]」というのがあるがここでは触れない．

3.5.1 Störmer の方法

Störmer による tan 関係式の探索法について述べる [5]．なお，本節の定理は，著者には理解できません (^^; ;．ウソ書いているかもしれませんので，あらかじめ御了承ください．

まずはじめに予備知識として，次の定理が成り立つらしい．

定理: Fermat・Euler の素数定理 x が整数で $x > 0$ の時，$x^2 + 1$ は次の形に素因数分解出来る．

$$x^2 + 1 = 2^\tau \cdot p_1^{\alpha(1)} \cdot p_2^{\alpha(2)} \cdots p_S^{\alpha(S)} = \begin{cases} \tau & 0 \text{ もしくは } 1. \\ \alpha(s) & \text{整数.} \\ p_s & p_s \bmod 4 = 1 \text{ を満たす素数.} \end{cases}$$

以上．

次は，探索に使う，本題の定理である． $\tan^{-1}$ に関して，次の定理が成り立つらしい．証明は [32] を見てください．

[3]複素平面の知識のある読者なら，条件 (i) の幾何学的意味に気が付くと思う．

[4]三角関数の加法定理をいろいろ変形して関係式を作り，探索する方法です．例：$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{x+1} + \tan^{-1}\frac{1}{x^2+x+1}$．参考文献 [32, 10]．

[5]本章を理解するには，線形代数の知識が必要です．

定理

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \tan^{-1}\frac{1}{x_n} = \frac{k\pi}{4}. \quad (c_n, x_n, k \text{ は整数．} \quad k, x_n > 0, c_n \neq 0.)$$

が成立するための必要十分条件は，

$$\begin{aligned}
1 + x_1^2 &= 2^{\tau(1)} \cdot p_1^{|\alpha(1,1)|} \cdot p_2^{|\alpha(2,1)|} \cdots p_S^{|\alpha(S,1)|}, \\
1 + x_2^2 &= 2^{\tau(2)} \cdot p_1^{|\alpha(1,2)|} \cdot p_2^{|\alpha(2,2)|} \cdots p_S^{|\alpha(S,2)|}, \\
\cdots &= \cdots \\
1 + x_N^2 &= 2^{\tau(N)} \cdot p_1^{|\alpha(1,N)|} \cdot p_2^{|\alpha(2,N)|} \cdots p_S^{|\alpha(S,N)|}.
\end{aligned}$$

$\tau(s)$ は 0 か 1． $\alpha(s,n)$ は整数．0 の場合もある．

$$\sum_{n=1}^{N} |\alpha(s,n)| > 1, \quad p_s \text{は} \ p_s \bmod 4 = 1 \text{ を満たす素数.}$$

と素因数分解するとき，

(i) $(c_1\tau(1) + c_2\tau(2) + \cdots c_N\tau(N) + k) \bmod 2 = 0.$

(ii) 次の c_s を変数とする，N 元連立方程式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
c_1\alpha(1,1) + c_2\alpha(1,2) + \cdots c_N\alpha(1,N) &= 0, \\
c_1\alpha(2,1) + c_2\alpha(2,2) + \cdots c_N\alpha(2,N) &= 0, \\
\cdots &= \cdots \\
c_1\alpha(S,1) + c_2\alpha(S,2) + \cdots c_N\alpha(S,N) &= 0.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\alpha(s,i)\cdot\alpha(s,j) > 0 \quad &\text{ならば，} \quad (x_j - x_i) \bmod p_s = 0, \\
\alpha(s,i)\cdot\alpha(s,j) < 0 \quad &\text{ならば，} \quad (x_j + x_i) \bmod p_s = 0.
\end{aligned}$$

以上 3 つが成立する事である．

以上．

探し方　次のような方法が適当ではないだろうか．

(1) 一定範囲の正の整数 x の集合に対して，x^2+1 を素因数分解する．そして素因数として現れた 2 以外の素数 (奇素数) の一覧を作成する．(2 以外の素数は奇数のため奇素数という)

(2) (1) で得た奇素数の一覧より，奇素数を S 個ピックアップする [6]．

ピックアップした奇素数を $p_s (0 < s \leq S)$ とする．

(3) ピックアップした奇素数 p_s と 2 のみを素因数として持つ x をすべて取り出す．奇素数 p_s のいずれかが 0 個しか含まれないのも取り出す．

例: $S = 2$, 奇素数として $p_1 = 5$ と $p_2 = 281$ をピックアップすると，適合する x として，2 ($2^2+1 = 5$), 3 ($3^2+1 = 2\cdot5$), 7 ($7^2+1 = 2\cdot5^2$), 53 ($53^2+1 = 2\cdot5\cdot281$), 4443 ($4443^2+1 = 2\cdot5^3\cdot281^2$) などが選び出される．

[6] あらかじめ一定数の奇素数をピックアップし，その素数が現れる x を探すという方法もある．本手法は共通の素数を目印にして探す方法であるので，大規模な探索を行うなら，こちらを勧める．x を小さい順から一つづつ素因数分解するより効率が良いようだ．具体的には，ピックアップした奇素数と 2 を使って可能な限りの組合せを作り，x^2+1 の形に分解出来ないかを調べる．

(4) (3) で取り出した x の部分集合から，$S+1$ 個以内の組合せで x を取り出します．取り出した x の数を N とする．($S+1 \geq N \geq 2$．) 取り出した x の組合せに対して (5)〜(7) を調べていく．

例：計算例として，奇素数 5 と 281 を素因数として持つ 2, 3, 7, 53, 4443 から 7, 53, 4443 を抜きだします ($S=2$, $N=3$)． 表としてまとめると次のようになる．

	5 (p_1)	281 (p_2)
7 (x_1)	2 ($\alpha(1,1)$)	0 ($\alpha(2,1)$)
53 (x_2)	1 ($\alpha(1,2)$)	1 ($\alpha(2,2)$)
4443 (x_3)	3 ($\alpha(1,3)$)	2 ($\alpha(2,3)$)

(5) $\alpha(s,n)$ の符号を決定する．

定理 (iii) より，「$\alpha(s,i)\cdot\alpha(s,j) > 0$ ならば，$(x_j - x_i) \bmod p_s = 0$．$\alpha(s,i)\cdot\alpha(s,j) < 0$ ならば，$(x_j + x_i) \bmod p_s = 0$.」という条件が成立する必要がある．

具体的には，各奇素数 p_s の $\alpha(s,n)$ に対して，$\alpha(s,i) \neq 0$ となる最小の $\alpha(s,i)$ について，符号を $+$ とする．

残りの α の符号は，$(x_j - x_i) \bmod p_s = 0$ ならば $\alpha(s,j)$ の符号を $-$ にし，$(x_j + x_i) \bmod p_s = 0$ なら $\alpha(s,j)$ の符号を $+$ にする．

例：はじめに $\alpha(1,1)=2$ と $\alpha(2,2)=1$ の符号を $+$ に決定する．

	5	281
7	+2	0
53	±1(?)	+1
4443	±3(?)	±2(?)

残りの α については，$(53+7) \bmod 5 = 0$．$(4443+7) \bmod 5 = 0$．$(4443+53) \bmod 281 = 0$．したがって符号は以下のように定まる．

	5	281
7	+2	0
53	−1	+1
4443	−3	−2

(6) 定理 (ii) の c_n を変数とする，等式が S 個の N 元連立方程式を作り，解く．

本方程式は，変数が N 個あるが，ほとんどの場合等式の数が $S=N-1$ になるので，不定方程式になる．$N=S$ の場合でも，Rank を計算すると，不定方程式になる場合がほとんどのようである．不定方程式ならば，整数解を求める．

例：

$$2c_1 - c_2 - 3c_3 = 0, \quad 0c_1 + c_2 - 2c_3 = 0.$$

本方程式は不定方程式である．解は t をパラメータ変数として，

$$c_1 = 5t, \quad c_2 = 4t, \quad c_3 = 2t.$$

$t=1$ とすると，整数解が $c_1=5$,$c_2=4$,$c_3=2$ と求まる．この時 $k=1$ となり，

$$\frac{\pi}{4} = 5\tan^{-1}\frac{1}{7} + 4\tan^{-1}\frac{1}{53} + 2\tan^{-1}\frac{1}{4443}.$$

となる．方程式を解く上での注意点をいくつか挙げておく．

– 本連立方程式は，同次方程式といわれるもので，自明な解 $(c_n \equiv 0)$ を持ち $k = 0$ という条件で式 (3.5) を満たすが，それは考えない．

– 自明な解 $(c_n \equiv 0)$ 以外でも，$k = 0$ になる解が多数ある．例えば，

$$\frac{0\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{47321} - 2\tan^{-1}\frac{1}{80782} + \tan^{-1}\frac{1}{275807}.$$

– 連立方程式によっては自明な解しか持たない場合がある．その条件を考えると (5)〜(7) で試す組合せが減る．

– 解が線形性をもつ．例で $t = 2$ の場合は，整数解が $c_1 = 10$,$c_2 = 8$,$c_3 = 4$ となり $k = 2$ となる．

$$\frac{2\pi}{4} = 10\tan^{-1}\frac{1}{7} + 8\tan^{-1}\frac{1}{53} + 4\tan^{-1}\frac{1}{4443}.$$

– 解ベクトルが 2 本以上ある事がある．その場合は，$\tan^{-1}$ 関係式が 2 つ以上合成されている．次の式は解ベクトルが 2 本ある例．2 つの式に分解出来る．

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{4} &= 7\tan^{-1}\frac{1}{2} + 3\tan^{-1}\frac{1}{3} - 4\tan^{-1}\frac{1}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{47}.\\ &= 3(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}) + 4(\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{47}).\end{aligned}$$

(7) 得られた公式が，定理 3.12 を満たすか調べる．数百桁程度の数値計算を行い正しい円周率の値が得られるか調べる．

以上

本手法を一言で説明すると,「共通の素数を目印にして探す方法」とでもいうのが適当だろうか.

例： $N = S = 3$ の例を挙げておく．奇素数 p_s として $13, 37, 73$．適合する x として $5, 265, 2436$ を選ぶ．

$$5^2 + 1 = 2 \cdot 13, \quad 265^2 + 1 = 2 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73, \quad 2436^2 + 1 = 13^3 \cdot 37 \cdot 73.$$

	13	37	73
5	+1	0	0
265	+1	+1	+1
2436	+3	−1	−1

$$c1 + c2 + 3c3 = 0, \quad c2 - c3 = 0, \quad c2 - c3 = 0.$$

Rank は 2 である． 解は t をパラメータ変数として，

$$c_1 = 4t, \quad c_2 = -t, \quad c_3 = -t.$$

$t = 1$ とすると，整数解が $c_1 = 4$,$c_2 = -1$,$c_3 = -1$ と求まる．この時 $k = 1$ となり，

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{265} - \tan^{-1}\frac{1}{2436}.$$

以上

3.6 $\tan^{-1}$ 級数と連分数

$\tan^{-1}$ を表す級数はいくつか知られている．

Euler による級数．

$$\tan^{-1} t = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n} n} (\frac{t^2}{1+t^2})^n .$$

Tayler 級数．通常本式が使われる．

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad \text{もしくは} \quad \tan^{-1}\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}} .$$

本 Tayler 級数を関係式 (6.2) を使って連分数として表すと次のようになる.(未チェック)

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x^2}{3-x^2+\cfrac{3^2x^2}{5-3x^2+\cfrac{5^2x^2}{7-5x^2+\cfrac{7^2x^2}{9-7x^2+\ddots}}}}} \\ &= \frac{x}{1+}\,\frac{1^2x^2}{3-x^2+}\,\frac{3^2x^2}{5-3x^2+}\,\frac{5^2x^2}{7-5x^2+}\,\frac{7^2x^2}{9-7x^2+}\cdots\frac{(2n-1)^2x^2}{(2n+1)-(2n-1)x^2+}\cdots .\end{aligned}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+}\,\frac{1^2}{3x^2-1+}\,\frac{3^2}{5x^2-3+}\,\frac{5^2}{7x^2-5+}\,\frac{7^2}{9x^2-7+}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)x^2-(2n-1)+}\cdots .$$

超幾何級数を使うと Tayler 級数は次のようになる．

$$\tan^{-1} x = x \cdot {}_2F_1(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2) .$$

参考文献 [78]．符号が $\tan^{-1}\frac{1}{x-1}$ の時に，$x=2$ を代入すると第 1.6.3 節の式 (1.11) が誘導される．

$$\tan^{-1}\frac{1}{x\mp 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{x^{4n+3}}\left(\frac{x^2}{4n+1} \pm \frac{2x}{4n+2} + \frac{2}{4n+3}\right).$$

また、次の関係もある。(未チェック)

$$\tan^{-1} x = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7+\cfrac{4^2x^2}{9+\ddots}}}}} = \frac{x}{1+}\,\frac{1^2x^2}{3+}\,\frac{2^2x^2}{5+}\,\frac{3^2x^2}{7+}\cdots\frac{n^2x^2}{2n+1+}\cdots .$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cfrac{1}{x+\cfrac{1^2}{3x+\cfrac{2^2}{5x+\cfrac{3^2}{7x+\cfrac{4^2}{9x+\ddots}}}}} = \frac{1}{x+}\,\frac{1^2}{3x+}\,\frac{2^2}{5x+}\,\frac{3^2}{7x+}\cdots\frac{n^2}{(2n+1)x+}\cdots .$$

第4章　Ramanujan 型級数

インドの天才数学者 Ramanujan[1] の 6 番目の論文 “Modular Equations and Approximations to π” [66] から始まる，楕円積分に由来する円周率の無限級数がいくつも知られている．

$$\frac{9801}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{((4^n)\cdot(n!))^4} \cdot \frac{26390n + 1103}{99^{4n}}. \quad \text{Type D}, N = 58.$$

$$\frac{1}{12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n)!}{(3n)!(n!)^3} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{(640320^3)^{n+1/2}}. \quad \text{Type F-2}, N = 163.$$

この形の級数は Ramanujan 型級数 [2] と呼ばれている．第 1.7.1 節にもいくつか挙げている．

Ramanujan の発見した円周率の級数は論文に多数掲載されているが，証明はきちんとした形ではわずかしか残っていない．この章で挙げている数式の大部分は，Borwein 兄弟達などの後世の人達によって再発見されたものです．

本章では円周率公式の元になる数式を，Borwein 兄弟の著書 “Pi and AGM - A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity” より第 5.5 節 “Generalized Elliptic integrals and rational and algebraic series for 1/π and 1/K” をもとにして掲載している [6, pp.177-191]．参考文献 [68], [75].

注意：本章には非常に多くの数式・数表が含まれます．間違いが全く無いという自信はありません．また著者は数式の意味は理解していませんのでウソ書いているかもしれません (^^; ;.

4.1　前提となる数式

Ramanujan 型級数に現れる数式だけでなく，第 1.9 節に現れる数式も挙げている．参考文献 [6].

以下の式で，k_N, $\alpha(N)$, G_N, g_N などは N が正の有理数の場合は，必ず代数的数になるらしい [3].

Ramanujan 型級数に現われる係数

この係数は，超幾何級数に由来するものです．具体的な値を第 6.6.7 節に挙げている．

$$R_s(n) = \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2}+s)_n(\frac{1}{2}-s)_n}{(1)_n(1)_n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

$$R_0(n) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\right)^3. \quad R_{1/6}(n) = \frac{(2n)!(3n)!}{2^{2n}3^{3n}(n!)^5}.$$

$$R_{1/4}(n) = \frac{(4n)!}{((4^n)\cdot(n!))^4}. \quad R_{1/3}(n) = \frac{(6n)!}{(3n)!\cdot(12^n\cdot n!)^3}.$$

[1]Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

[2]英語表記は Ramanujan type series / Ramanujan type formula．訳語は著者が作った．

[3]代数的数とは，有理数係数の代数方程式の解になる数の事．詳しくは代数学の書籍をごらんください．

楕円積分関連の数式

$K(k)$ は，k が 1 に近いと非常に収束が遅い．

$$K(k) := \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2)\,,\quad E(k) := \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2)\,.\quad (0 \le k \le 1)$$

$$K_s(k) := \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s;1;k^2)\,,\quad E_s(k) := \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(-\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s;1;k^2)\,.\quad (|s| < \frac{1}{2})$$

$$K(k) := K_0(k),\quad E(k) := E_0(k).$$

$$K'(k) := K(k').\quad E'(k) := E(k').\quad k^2 + (k')^2 = 1.$$

$$E_sK'_s + K_sE'_s - K_sK'_s = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos(\pi s)}{1+2s}.$$

$$\theta_2(q) := \sum_{n=\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}.\quad \theta_3(q) := \sum_{n=\infty}^{\infty} q^{n^2}.\quad \theta_4(q) := \sum_{n=\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot q^{n^2}.$$

$$\theta_2(0) = 0.\quad \theta_3(0) = 0.\quad \theta_4(0) = 1.$$

$$k(q) := k = \left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)^2.\quad k'(q) := k' = \left(\frac{\theta_4}{\theta_3}\right)^2.$$

$$k_N := \left(\frac{\theta_2(q)}{\theta_3(q)}\right)^2,\quad \text{但し } q := \exp(-\pi\sqrt{N}).$$

$$\lambda^*(r) := k(q),\quad \text{但し } q := \exp(-\pi\sqrt{r}). \tag{4.1}$$

「$\dot{\theta}_4(q)$」は「$\theta_4(q)$」の微分．

$$\alpha(N) := \left(\frac{1}{\pi} - 4q\sqrt{N}\cdot\frac{\dot{\theta}_4(q)}{\theta_4(q)}\right)\cdot\theta_3(q)^{-4},\quad \text{但し } q := \exp(-\pi\sqrt{N}). \tag{4.2}$$

$$\alpha(N) = \frac{\pi}{4K(k)^2} - \sqrt{N}\left(\frac{E(k)}{K(k)} - 1\right),\quad \text{但し } k := \lambda^*(N).$$

$\alpha_0(N) = \alpha(N)$.

$$\alpha_s(N) = \frac{\pi}{4K_s(k)^2}\frac{\cos(\pi s)}{1+2s} - \sqrt{N}\left(\frac{E_s(k)}{K_s(k)} - 1\right),\quad \text{但し } k := \lambda_s^*(N).$$

$\lambda_s^*(N)$ の定義は陰関数．$\lambda^*(N) := \lambda_0^*(N)$．

$$\frac{K'_s(\lambda_s^*(N))}{K_s(\lambda_s^*(N))} = \sqrt{N}.(\quad N > 0) \tag{4.3}$$

$$\sqrt{C_s}\cdot\frac{K'_s(\lambda_s^*(N))}{K_s(\lambda_s^*(N))} = \frac{K'(\lambda^*(C_sN))}{K(\lambda^*(C_sN))},\quad \text{但し } C_s := 4\cos(\pi s)^4.$$

$$G_N^{-12} := 2k_Nk'_N.\quad g_N^{-12} := \frac{2k_N}{(k'_N)^2}.$$

表 4.1: 具体的な値 (1/2)

n	$\alpha(n)$	$k_n(=\lambda^*(n))$	k'_n	$\lambda^*_{1/6}(n)$
1	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
2	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2\sqrt{2}-2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$
3	$(\sqrt{3}-1)/2$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$	$\sqrt{-5+3\sqrt{3}}/2$
4	$6-4\sqrt{2}$	$3-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3\sqrt{2}-4}$	$\sqrt{(9-5\sqrt{3})/18}$
5	-	-	-	$\sqrt{(25-11\sqrt{5})/50}$
6	-	-	-	$\sqrt{(2^2\cdot 17-3^3\cdot\sqrt{6})/500}$
7	$(\sqrt{7}-2)/2$	-	-	-
9	$(3-2\sqrt{-9+6\sqrt{3}})/2$	-	-	-
15	$(\sqrt{20-10\sqrt{3}})/2$	-	-	-
∞	$1/\pi$	0	1	-

$$g_{4N}=2^{1/4}g_NG_N.\quad G_N=G_{1/N}.\quad (g_NG_N)^8(G_N^8-g_N^8)=1/4.$$

$$J_N:=\frac{(4G_N^{24}-1)^3}{27G_N^{24}}=\frac{(4g_N^{24}+1)^3}{27g_N^{24}}.$$

$$G_{s,N}^{-12}:=2\lambda_s^{*'}(N)\lambda_s^*(N).\quad (\lambda_s^{*'}(N))^2+(\lambda_s^*(N))^2=1.$$

$$m(N)=\sqrt{1+2\sqrt{2}G_{9N}^3/G_N^9}.\quad \text{間違い?}$$

以下著者が導いた式．信用するなかれ．

$$G_{1/4,N}^{-12}=\left(\frac{g_{2N}^{12}+g_{2N}^{-12}}{2}\right)^{-1}=2\lambda_{1/4}^{*'}(N)\lambda_{1/4}^*(N).\quad G_{1/3,N}^{-12}=J_N^{-1/2}=2\lambda_{1/3}^{*'}(N)\lambda_{1/3}^*(N).$$

$$g_{2N}^{-12}=\frac{1+\sqrt{1-G_{1/4,N}^{-24}}}{G_{1/4,N}^{-12}}=\frac{\lambda_{1/4}^{*'}(N)}{\lambda_{1/4}^*(N)}.$$

$$\lambda_{1/4}^*(N)=\frac{1}{\sqrt{1+g_{2N}^{-24}}}.\quad \lambda_{1/4}^{*'}(N)=\frac{g_{2N}^{-12}}{\sqrt{1+g_{2N}^{-24}}}.$$

$$\sqrt{1-G_{s,N}^{-24}}=(\lambda_s^{*'}(N))^2-(\lambda_s^*(N))^2=1-2(\lambda_s^*(N))^2.$$

$$(\lambda_s^*)^2=\frac{1-\sqrt{1-G_s^{-24}}}{2}.\quad (\lambda_s^{*'})^2=\frac{1+\sqrt{1-G_s^{-24}}}{2}.$$

$$\lambda_s^*=\frac{\sqrt{1+g_s^{-24}}-1}{g_s^{-12}}.\quad (\lambda_s^{*'})^2=\frac{2\sqrt{1+g_s^{-24}}-2}{g_s^{-24}}.$$

表 4.2: 具体的な値 (2/2)

n	G_n^{-12}	g_n^{-12}	$m(n)$ 間違い?	J_n
1	1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3+2\sqrt{3}}$	1
2	$(2\sqrt{2}-2)^{3/2}$	1	$\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$	125/27
3	1/2	$4\sqrt{26-15\sqrt{3}}$	$(1+2^{1/3})^2/\sqrt{3}$	125/4
4	$4\sqrt{99\sqrt{2}-140}$	$\sqrt{2}/4$	-	1331/8
5	$\sqrt{5}-2$	-	$\sqrt{1+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$	$(5(1975+884\sqrt{5}))/27$
6	-	$3-2\sqrt{2}$	-	$1399+988\sqrt{2}$
7	1/8	-	-	614125/64
8	-	-	-	$(125(26125+18473\sqrt{2}))/216$
9	$7-4\sqrt{3}$	-	-	$(399849+230888\sqrt{3})/9$
10	-	$1/(2+\sqrt{5})^2$	-	$5(24635+11016\sqrt{5})$
∞	0(?)	0(?)	-	-

4.2 Ramanujan 型級数

表には，各公式の具体的な値を挙げている．今まで知られている式に加えて，著者が計算した X_N, Y_N, Z_N の値を挙げている．煩雑な値の式は省略した．著者が得た全公式は，[84] に掲載してある．

ここで挙げている Type A, B, C などは一般的な分類ではありません．著者が独自に名付けたものです．

以降の数式で N は有理数.

4.2.1 Type A

後述の Type G, $s=0$ と同じ.

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty} R_0(n)\cdot(X(N)+n\cdot Y(N))\cdot Z(N)^{2n},\quad (N>1)$$

$$X_N:=\alpha(N)-\sqrt{N}k_N^2,\quad Y_N:=\sqrt{N}\sqrt{1-G_N^{-24}}=\sqrt{N}((k_N')^2-k_N^2)=\sqrt{N}(1-2k_N^2),$$
$$Z_N:=G_N^{-12}. \tag{4.4}$$

Ramanujan は，$N=3,7,15$ を得ている．

4.2.2 Type B

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot R_0(n)\cdot(X_N+n\cdot Y_N)\cdot Z_N^{2n},\quad (N\geq 2)$$

$$X_N:=\alpha(N)/(k_N')^2,\quad Y_N:=\sqrt{N}\left(\frac{1+k_N^2}{1-k_N^2}\right),\quad Z_N:=g_N^{-12}. \tag{4.5}$$

表 4.3: Type A

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	$3-2\sqrt{2}$	$8-5\sqrt{2}$	$8/(5\sqrt{2}+7)$
3	$1/4$	$3/2$	$1/2^2$
4	$-28+20\sqrt{2}$	$-66+48\sqrt{2}$	$32/(140+99\sqrt{2})$
7	$5/16$	$21/8$	$1/8^2$
9	$\sqrt{3(-45+26\sqrt{3})}$	$6\sqrt{-24+14\sqrt{3}}$	$1/(7+4\sqrt{3})^2$
13	$\sqrt{(-2859+793\sqrt{13})/2}$	$6\sqrt{-234+65\sqrt{13}}$	$1/(18+5\sqrt{13})^2$
15	$(-1+5\sqrt{5})/32$	$(15+21\sqrt{5})/16$	$1/(28+12\sqrt{5})^2$
25	$5\sqrt{2(-4935+2207\sqrt{5})}$	$60\sqrt{-360+161\sqrt{5}}$	$1/(161+72\sqrt{5})^2$
37	$\sqrt{(-23073603+3793277\sqrt{37})/2}$	$42\sqrt{-32634+5365\sqrt{37}}$	$1(882+145\sqrt{37})^2$

表 4.4: Type B

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	$1/2$	2	1
3	$-10+6\sqrt{3}$	$-24+15\sqrt{3}$	$16/(26+15\sqrt{3})$
4	$\sqrt{2}/4$	$3\sqrt{2}/2$	$1/8$
6	$177/2-36\sqrt{6}$	$-6+6\sqrt{2}$	$1/(3+2\sqrt{2})^2$
7	$-296+112\sqrt{7}$	$-672+255\sqrt{7}$	$64/(2024+765\sqrt{7})$
10	$23/2-5\sqrt{5}$	$30-12\sqrt{5}$	$1/(9+4\sqrt{5})^2$
18	$177/2-36\sqrt{6}$	$210-84\sqrt{6}$	$1/(49+20\sqrt{6})^2$
22	$-401/2+142\sqrt{2}$	$-462+330\sqrt{2}$	$1/(99+70\sqrt{2})^2$
58	$68403/2-6351\sqrt{29}$	$74646-13860\sqrt{29}$	$1/(9801+1820\sqrt{29})^2$

表 4.5: Type C

Type B と比べて，係数 N が 4 倍違う．

N	X_N	Y_N	Z_N^2
1/2	1/2	2	1
3/4	$-10+6\sqrt{3}$	$-24+15\sqrt{3}$	$16/(26+15\sqrt{3})$
1	$\sqrt{2}/4$	$3\sqrt{2}/2$	1/8

4.2.3 Type C

Type B と比べて N を 4 倍した式．

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\ R_0\left(n\right)\cdot\left(X_N+n\cdot Y_N\right)\cdot Z_N^{2n},\quad (N\geq\frac{1}{2})$$

$$X_N:=\left(\alpha(N)-\frac{\sqrt{N}}{2}k_N^2\right)/k_N',\quad Y_N:=\sqrt{N}(k_N'+(k_N')^{-1}),\quad Z_N:=g_{4N}^{-12}=(2^{1/4}\cdot g_N\cdot G_N)^{-12}. \tag{4.6}$$

4.2.4 Type D

後述の Type G, $s=1/4$ を整理した形．

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\cdot R_{1/4}\left(n\right)\cdot\left(X_N+n\cdot Y_N\right)\cdot Z_N^{2n+1},\quad (N>2)$$

$$\begin{aligned}X_N&:=\frac{\alpha(N)Z_N^{-1}}{1+k_N^2}-\frac{\sqrt{N}}{4}g_N^{-12}=\frac{[\alpha_{1/4}(N/2)-\sqrt{N/2}(\lambda_{1/4}^*(N/2))^2](1+1/2)}{\cos(\pi/2)\cdot G_{1/4,N/2}^{-12}},\\ Y_N&:=\sqrt{N}\left(\frac{g_N^{12}-g_N^{-12}}{2}\right)=\frac{\sqrt{N/2}\sqrt{1-G_{1/4,N/2}^{-24}}}{\cos(\pi/2)\cdot G_{1/4,N/2}^{-12}},\\ Z_N&:=\frac{2}{g_N^{12}+g_N^{-12}}=\frac{4k_N(k_N')^2}{(1+k_N^2)^2}=G_{1/4,N/2}^{-12}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ramanujan は，$N=6,10,18,22,58$ を得ている．

4.2.5 Type E

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\ R_{1/4}\left(n\right)\cdot\left(X_N+n\cdot Y_N\right)\cdot Z_N^{2n+1},\quad (N\geq 4)$$

$$\begin{aligned}X_N&:=\frac{\alpha(N)Z_N^{-1}}{(k_N')^2-k_N^2}+\frac{\sqrt{N}}{2}k_N^2G_N^{12},\quad Y_N:=\sqrt{N}\left(\frac{G_N^{12}+G_N^{-12}}{2}\right),\\ Z_N&:=\frac{2}{G_N^{12}-G_N^{-12}}=\frac{4k_Nk_N'}{1-4(k_Nk_N')^2}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ramanujan は，$N=5,9,13,25,37$ を得ている．

表 4.6: Type D

N	X_N	Y_N	Z_N^2
4	$\sqrt{2}/4$	$7\sqrt{2}/4$	$32/81$
6	$\sqrt{3}/2$	$4\sqrt{3}$	$1/3^2$
10	$2\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$	$1/3^4$
18	$9\sqrt{3}$	$120\sqrt{3}$	$1/49^2$
22	$19\sqrt{11}/2$	$140\sqrt{11}$	$1/99^2$
58	$2206\sqrt{2}$	$52780\sqrt{2}$	$1/99^4$

表 4.7: Type E

N	X_N	Y_N	Z_N^2
5	$3/4$	5	$1/4$
7	$\sqrt{7}/2$	$(65\sqrt{7})/16$	$(16/63)^2$
9	$9/4$	21	$1/48$
13	$23/4$	65	$1/18^2$
17	$(27+6\sqrt{17})/4$	$85+20\sqrt{17}$	$1/(8(103+25\sqrt{17}))$
21	$51/4+8\sqrt{3}$	$189+112\sqrt{3}$	$1/(42+24\sqrt{3})^2$
25	$205/4$	805	$1/(72^2\cdot 5)$
33	$(327+58\sqrt{33})/4$	$1485+260\sqrt{33}$	$1/(72(1867+325\sqrt{33}))$
37	$1123/4$	5365	$1/882^2$
45	$1503/4+216\sqrt{3}$	$7905+4560\sqrt{3}$	$1/(1178+680\sqrt{3})^2$
49	$2373/4+224\sqrt{7}$	$13041+4928\sqrt{7}$	$1/(1296(5355+2024\sqrt{7}))$
57	$(5619+746\sqrt{57})/4$	$33345+4420\sqrt{57}$	$1/(72(542267+71825\sqrt{57}))$
73	$(26819+3138\sqrt{73})/4$	$179945+21060\sqrt{73}$	$1/(648(1368963+160225\sqrt{73}))$
85	$77491/4+4698\sqrt{17}$	$561085+136080\sqrt{17}$	$1/(60858+14760\sqrt{17})^2$
93	$150831/4+21776\sqrt{3}$	$1142505+659680\sqrt{3}$	$1/(118482+68400\sqrt{3})^2$
97	$(208227+21142\sqrt{97})/4$	$1610685+163540\sqrt{97}$	$1/(648(82547463+8381425\sqrt{97}))$
133	$2931819/4+168152\sqrt{19}$	$26555445+6092240\sqrt{19}$	$1/(2302650+528264\sqrt{19})^2$

表 4.8: Type F-1

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	1	28/3	27/125
3	3	33	4/125
4	$5\sqrt{2}$	$63\sqrt{2}$	8/1331
6	$15+10\sqrt{2}$	$228+156\sqrt{2}$	$1/(1399+988\sqrt{2})$
7	54	3591/4	$(4/85)^3$
10	$135+62\sqrt{5}$	$2700+1224\sqrt{5}$	$1/(123175+55080\sqrt{5})$
15	$1275+571\sqrt{5}$	$(248325+111111\sqrt{5})/8$	$128/(5(274207975+122629507\sqrt{5}))$
18	$4065+1668\sqrt{6}$	$108500+44408\sqrt{6}$	$27/(125(23604673+9636536\sqrt{6}))$
22	$16659+11750\sqrt{2}$	$490644+346500\sqrt{2}$	$1/(125(14571395+10303524\sqrt{2}))$

4.2.6 Type F

後述の Type G, $s=1/3$ を整理した形.

$$x(n) := \frac{\sqrt{n(1-G_n^{-24})}+2(\alpha(n)-\sqrt{n}k_n^2)(4G_n^{24}-1)}{3\sqrt{3}} = \frac{[\alpha_{1/3}(n)-\sqrt{n}(\lambda_{1/3}^*(n))^2](1+2/3)}{\cos(\pi/3)G_{1/3,n}^{-12}},$$

$$y(n) := \sqrt{n}\frac{2}{3\sqrt{3}}[(8G_n^{24}+1)\sqrt{1-G_n^{-24}}] = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-G_{1/3,n}^{-24}}}{\cos(\pi/3)G_{1/3,n}^{-12}},$$

$$z(n) := J_N^{-1/2} = G_{1/3,N}^{-12}.$$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot R_{1/3}(n) \cdot (X_N + n\cdot Y_N)\cdot Z_N^{2n+1}, \quad (N>1)$$

$$X_N := x(N), \quad Y_N := y(N), \quad Z(N) := z(N). \tag{4.9}$$

Type F には F1〜3 のような亜種があります.

Type F-1

X_N, Y_N に $\sqrt{3}$ を掛ける事により，有理数化される場合が多くなります.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{Z_N}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cdot R_{1/3}(n) \cdot (X_N + n\cdot Y_N)\cdot Z_N^{2n}, \quad (N>1)$$

$$X_N := \sqrt{3}\cdot x(N), \quad Y_N := \sqrt{3}\cdot y(N), \quad Z_N := z(N). \tag{4.10}$$

表 4.9: Type F-2

N	X_N	Y_N	Z_N^2
7	24	189	-64/125
11	60	616	-27/512
15	$12(5+3\sqrt{5})$	$(63(25+13\sqrt{5}))/2$	$(32(1415-637\sqrt{5}))/33275$
19	300	4104	-1/512
27	1116	18216	-9/64000
35	$12*(145+64\sqrt{5})$	$56(575+256\sqrt{5})$	$-27/(2560(360+161\sqrt{5}))$
43	9468	195048	-1/512000
51	$60(197+48\sqrt{17})$	$504(527+128\sqrt{17})$	$-1/(256(6263+1519\sqrt{17}))$
67	122124	3140424	-1/85184000
75	$900(143+64\sqrt{5})$	$360(9729+4352\sqrt{5})$	$-1/(512(369830+165393\sqrt{5}))$
91	$60(8537+2368\sqrt{13})$	$16632(923+256\sqrt{13})$	$-1/(512(5854330+1623699\sqrt{13}))$
99	$180(5423+944\sqrt{33})$	$3192(9559+1664\sqrt{33})$	$-27/(2816(104359189+18166603\sqrt{33}))$
115	$12(274345+122688\sqrt{5})$	$4968(22325+9984\sqrt{5})$	$-1/(2560(48360710+21627567\sqrt{5}))$
123	$12(488045+76224\sqrt{41})$	$504(404875+63232\sqrt{41})$	$-1/(64000(6122264+956137\sqrt{41}))$
147	$84(353695+77184\sqrt{21})$	$5544(204125+44544\sqrt{21})$	$-1/(192000(52518123+11460394\sqrt{21}))$
163	163096908	6541681608	-1/151931373056000

Type F-2

i は虚数単位.

$$\frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{Z_N^2}{-1728}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cdot R_{1/3}(n) \cdot (X_N + n \cdot Y_N) \cdot Z_N^{2n}, \quad (N \geq 7(?), \quad Z_N^2 < 0)$$

$$X_N := RE(\sqrt{-1728} \cdot x(t)), \quad Y_N := RE(\sqrt{-1728} \cdot y(t)), \quad Z_N := z(t), \quad t = \left(\frac{\sqrt{N}-i}{2}\right)^2. \tag{4.11}$$

Chudnovsky 兄弟は，$N = 163$ を得ている.

Type F-2'

Type F-2 と同値の公式.

$$\frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{Z_N^2}{-1728}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cdot R_{1/3}(n) \cdot (X_N + n \cdot Y_N) \cdot Z_N^{2n},$$

$$X_N := \frac{Y_N}{6}\left(1 - \frac{E_4(N)}{E_6(N)}(E_2(N) - \frac{6}{\pi\sqrt{N}})\right),$$

$$Y_N := \sqrt{1728(N - N/Z_N^2)}; \quad Z_N^2 := \frac{E_4(N)^3 - E_6(N)^2}{E_4(N)^3}, \tag{4.12}$$

表 4.10: Type F-3

Type F-2 と比べて，係数 X_N,Y_N が 12 倍違う．

N	X_N	Y_N	Z_N^2
7	2	63/4	-64/125
11	5	154/3	-27/512

$$E_2(N) := 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}, \quad E_4(N) := 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n},$$

$$E_6(N) := 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^n}{1-q^n}. \quad \text{但し } q := -\exp(-\pi\sqrt{N}).$$

Type F-3

Type F-2 と比べて X_N, Y_N が 12 倍だけ異なる．元論文 [69] を入手していないので，Type F-2 と比べてどのように異なるのかよく解らない．

$$\frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{Z_N^2}{-12}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cdot R_{1/3}(n) \cdot (X_N + n \cdot Y_N) \cdot Z_N^{2n}, \quad (N \geq 7(?), \quad Z_N^2 < 0)$$

$$X_N := RE(\sqrt{-12} \cdot x(t)), \quad Y_N := RE(\sqrt{-12} \cdot y(t)), \quad Z_N := z(t), \quad t = \left(\frac{\sqrt{N} - i}{2}\right)^2. \qquad (4.13)$$

Type F-4

まだ亜種がありそうだ．Type F-2 と共役的な位置付けの級数がある．文献 [69, 68] に掲載されているが，Type F-2 の共役関係にある級数が存在する．だが導出法は掲載されていない．

$$\frac{1}{12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \cdot \frac{A+Bn}{C^{n+1/2}}. \quad \text{Type F-2}, N = 427.$$

$$A = 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365,$$

$$B = 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750,$$

$$C = [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

$$\frac{1}{7.12\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \cdot \frac{A+Bn}{C^{n+1/2}}. \quad \text{共役級数.}$$

$$A = 212175710912\sqrt{61} - 1657145277365,$$

$$B = 13773980892672\sqrt{61} - 107578229802750,$$

$$C = [5280(236674 - 30303\sqrt{61})]^3.$$

(第 1.7.2 節より再掲)

4.2.7 Type G

パラメータ s を使い，Type A, D, F を一般化した式[4]．$s = 0, 1/3, 1/4, 1/6$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} R_s(n) \cdot (X_s(N) + n \cdot X_s(N)) \cdot Z_s(N)^{2n},$$

$$X_s(N) := [\alpha_s(N) - \sqrt{N}(\lambda_s^*(N))^2] \cdot \frac{1+2s}{\cos(\pi s)},$$

$$Y_s(N) := \frac{\sqrt{N}\sqrt{1-G_{s,N}^{-24}}}{\cos(\pi s)}, = \frac{\sqrt{N}((\lambda_s^{*'}(N))^2 - (\lambda_s^*(N))^2)}{\cos(\pi s)}$$

$$Z_s(N) := G_{s,N}^{-12} = 2\lambda_s^{*'}(N)\lambda_s^*(N). \tag{4.14}$$

$\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

Type G, $s = 0$

$$X_N := x_0(N), \quad Y_N := y_0(N), \quad Z_N := z_0(N). \quad (N > 1)$$

Type A と同じ．

Type G, $s = 1/3$

$$X_N := x_{1/3}(N), \quad Y_N := y_{1/3}(N), \quad Z_N := z_{1/3}(N) = G_{1/3,N}^{-12} = J_N^{-1/2}. \quad (N > 1(?)) \tag{4.15}$$

Type F と係数が少し違うが，同値の式．

Type G, $s = 1/4$

$$X_N := x_{1/4}(N), \quad Y_N := y_{1/4}(N), \quad Z_N := z_{1/4}(N) = G_{1/4,N}^{-12} = \left(\frac{g_{2N}^{12} + g_{2N}^{-12}}{2}\right)^{-1}. \quad (N > 1(?)) \tag{4.16}$$

Type D と係数が少し違うが，同値の式．

Type G, $s = 1/6$

$$X_N := x_{1/6}(N), \quad Y_N := y_{1/6}(N), \quad Z_N := z_{1/6}(N). \quad (N > 1(?)) \tag{4.17}$$

Ramanujan は，$N = 4, 5$ を得ている．

$\lambda_{1/6}^*(N)$ を表す簡潔な式は見付かってない．式 (4.3) の陰関数[5]としての定義しか知られてない．Ramanujan の失われた公式？[6]

[4]残された Type B, C, E を一般化出来ないのだろうか？

[5]関数 $y = f(x)$ において，定義域が x で値域が y の場合が陽関数．定義域が y で値域が x の関数が陰関数．陰関数でも数値的な技法を使えば計算できる．例えば 2 分法，ニュートン法など．数値計算関係の書籍を参照ください．

[6]と 2000 年 2 月まではここに書いていましたが，シンガポール大 Heng Huat Chan 達によって再発見されたようである [70]．(まだ良く読んでないが．) 余裕ができたら改訂するので，しばし待て．

表 4.11: Type G, $s = 1/3$

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	$3/(5\sqrt{5})$	$28/(5\sqrt{5})$	$27/125$
3	$2(\sqrt{3/5}/5)$	$22(\sqrt{3/5}/5)$	$4/125$
4	$20/(11\sqrt{33})$	$256/(11\sqrt{33})$	$8/1331$
7	$144(\sqrt{3/85}/85)$	$2394(\sqrt{3/85}/85)$	$(4/85)^3$

表 4.12: Type G, $s = 1/4$

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	$2/9$	$14/9$	$32/81$
3	$1/(2\sqrt{3})$	$8/(2\sqrt{3})$	$1/9$
4	$(66+36\sqrt{2})/49$	$(320-130\sqrt{2})/49$	$32/(457+325\sqrt{2})$
5	$2(\sqrt{2}/9)$	$20(\sqrt{2}/9)$	$1/9^2$
6	$(108+4\sqrt{3})/363$	$(960+170\sqrt{3})/363$	$(47744-27200\sqrt{3})/131769$
8	$(-120+184\sqrt{2})/441$	$(-228+1408\sqrt{2})/441$	$128/(71604+50787\sqrt{2})$
9	$9(\sqrt{3}/49)$	$120(\sqrt{3}/49)$	$1/2401$
11	$19/(18\sqrt{11})$	$280/(18\sqrt{11})$	$1/99^2$
14	$(13456-1568\sqrt{7})/29241$	$(152320+910\sqrt{7})/29241$	$256/(81(102376+38675\sqrt{7}))$
29	$2206(\sqrt{2}/9801)$	$52780(\sqrt{2}/9801)$	$1/99^4$

表 4.13: Type G, $s = 1/6$

N	X_N	Y_N	Z_N^2
2	$1/(3\sqrt{3})$	$6/(3\sqrt{3})$	$1/2$
3	$2-\sqrt{3}$	$(14-3\sqrt{12})/2$	$(-36+21\sqrt{3})/2$
4	$8/27$	$60/27$	$2/27$
5	$8/(15\sqrt{3})$	$66/(15\sqrt{3})$	$4/125$
6	$(3\sqrt{131+16\sqrt{6}})/125$	$2\sqrt{18749+4914\sqrt{6}}/125$	$27(463-182\sqrt{6})/31250$

4.3 数値計算値から正確な値を求める

この章を見て，実際に Ramanujan 型級数を見つけてみたくなった方もいるでしょう．

第 4.1〜4.2 節に出て来るような式は，代数的に計算し値を求める事も可能であるが，数学が得意な方にしかお勧めできない．代数的に求める事ができなければ，先人が求めた値を使うか，数値計算し，正確な値を推測するしかない．

例えば，式 (4.2) の $\alpha(2)$ の場合を数値計算すると $0.41421356\cdots$ である．これは $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ だから $\sqrt{2}-1$ と推測できる．簡単な式なら人間でも推測が付くが，$\alpha(3) = 0.36602540\cdots$ ぐらいになると人間の手には余る．

だが，世の中には便利な方法があり，数値計算した値から，代数的数を効率良く推測する方法もある．但し制限があるけどね． 次のような手順である．

- 高精度の数値計算を行う．百桁のオーダーで計算する．必要に応じて，さらに高精度で行う．

  著者は，C++数値計算ライブラリ LiDIA [7] を使用した．

- 数値計算した値を使って (代数学の) 最小多項式を推測する．

  (著者は代数学には詳しくないのだが，) 代数的数は，(定数倍を除いて) 一意の整係数の代数方程式の解として表す事が出来るらしい．これを “最小多項式” という．

  例えば，$\alpha(2) = \sqrt{2}-1$ の最小多項式は，$x^2+2x-1=0$.

  数値計算した値から最小多項式を効率よく推測する方法として,「LLL 法」というのがある．

  その方法を解説したいのだが，著者には全く原理がわからない． 以下の UBASIC の作者木田祐司先生のホームページに置いてある，UBASIC の「一般的な応用プログラム」の中に含まれる `minpol.ub` を参考にしていただきたい [8]．

  `http://www.rkmath.rikkyo.ac.jp/~kida/`

  このプログラムを使うと，$\alpha(3) = 0.36602540\cdots$ の最小多項式は，$2x^2+2x-1=0$ と推測できる．

- 求めた最小多項式解く．

  例えば，求めた最小多項式 $2x^2+2x-1=0$ を x について解く．解は $x = (\pm\sqrt{3}-1)/2$ と 2 個求まる．$(+\sqrt{3}-1)/2 = 0.366025\cdots$ だから，符号は $+$ を採用し，$\alpha(3) = (\sqrt{3}-1)/2$.

  なお，x の次数が 4 次以下の場合は，解の公式が存在するので，必ず解けます．代数学の書籍を御覧ください．しかし 5 次以上になると，解は存在するのですが，解の公式が存在しません．勘や経験でしか解く事が出来ません．著者は Mathematica 3.0[9] を使って方程式を解いてみたのだが，5 次以上は数%しか解く事が出来ませんでした．

- 検算する．元の計算精度の倍以上の精度で数値計算を行い比較する．

- 求めた値を使って，Ramanujan 型級数を構成し，円周率の値が得られるか調べる．

Good Luck!

---

[7] `http://www.informatik.tu-darmstadt.de/TI/LiDIA/Welcome.html`. 特に勧めるわけではないが一通りの機能は揃っている．

[8] このプログラムについては，NiftyServer のサイエンスフォーラムで教えていただいた．感謝します．

[9] `http://www.wolfram.com/`

第5章　級数の高効率計算法

今まで知られていた級数の計算手法は計算量が $O(N^2)$ であったが, ドイツの Darmstadt 工業大学の Bruno Haible 氏，Thomas Papanikolaou 氏及び，広島市立大学の右田剛史氏らにより, 計算量が $O(N(\log N)^3)$ の計算法が提案された [82, 60].

学術論文の入手は一般図書館では困難であるので，この章では右田氏の論文にほぼ沿った方法で，新しい手法を解説する.

但し, 著者はこの手法により実際に計算を行ったわけではない. 嘘が書いてある可能性が非常に高い. 実際に計算される方は原論文 [82, 60] をあたっていただきたい.

5.1　旧来の計算法

次の級数を考える.

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

$f(k)$ は常に有理数とする．級数の L 項までの和を S_L とする.

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} f(k). \tag{5.1}$$

S_L を扱いやすくするために, 式 (5.4) の形式に一般化する.

$$\begin{aligned}
S_L &= \frac{1}{C_0}A_0 + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}A_1 + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1}{C_2}A_2 + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1}{C_2}\frac{B_2}{C_3}A_3 + \cdots + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{\cdots}{\cdots}\frac{B_{L-2}}{C_{L-1}}A_{L-1}, && (5.2)\\
&= \frac{1}{C_0}(A_0 + \frac{B_0}{C_1}(A_1 + \frac{B_1}{C_2}(A_2 + \frac{B_2}{C_3}(A_3 + \frac{B_3}{C_4}(A_4 + \cdots, && (5.3)\\
&= \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\prod_{l=0}^{k-1} B_l}{\prod_{l=0}^{k} C_l} \cdot A_k. \quad (\text{但し} \prod_{l=0}^{-1} B_l = 1.) && (5.4)
\end{aligned}$$

ここで, A_k, B_l, C_l は数 10 桁以下の小さな整数とし, $B_l < C_l$ とします. この条件に適合しない級数はここでは考えません. 式 (5.2) から式 (5.4) に変形する過程は容易に分かると思います.

円周率の計算で頻繁に使われる $\tan^{-1}(1/x)$ は，上記の形式に一般化すると，

$$A_k = 1, \quad B_k = -(2k+1), \quad C_k = \begin{cases} x & (k=0). \\ (2k+1)x^2 & (0<k). \end{cases}$$

となります.

通常 S_L は次のような方法で求めます.

式 (5.2) を見てください. 始めに級数の第 0 項 $1/C_0$ を必要な精度で数値計算します. 第 1 項を求めるには, 第 0 項に B_0/C_1 を掛ける事により第 1 項を作成し, 第 2 項を求めるには, 第 1 項に B_1/C_2 を掛ける事により第 2 項を作成するという方法で次々に作成し, 求めた各項に A_k を掛け総和を求める事により計算します.

表 5.1: 例題の式

$\dfrac{1}{\pi}=\dfrac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(4n)!}{(n!)^4}\cdot\dfrac{26390n+1103}{(4\cdot 99)^{4n}}.$	Ramanujan の式.
$\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\dfrac{1}{(2k+1)\cdot x^{2k+1}}.$	$\tan^{-1}$ の Tayler 級数.

具体的な A_k, B_l, C_l の求め方

本論は横に置いて A_k, B_l, C_l を求める一般的な手法を示します.
はじめに, 求める対象となる級数を以下のようにおきます.

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}f(k).$$

まず, A_k は対象となる級数から適当に決めてください. $f(k)$ の分子から適当な部分を取り出して決めてください. もし A_k として適当な部分が無い場合は $A_k\equiv 1$ でも良いです. また, 後の式の誘導が難しくなる事を厭わなければ, 以下のような複雑な定義でも良いです.

$$A_k=\begin{cases}k^2 & (k\le 20).\\ k^3 & (20<k).\end{cases}$$

次に, 次式で $g(k)$ を求めます.

$$g(k)=\frac{f(k)}{A_k}.$$

式 (5.2) の定義により自動的に

$$C_0=1/g(0). \tag{5.5}$$

となります. C_0 が整数の値を取る事を確認してください. 整数でない場合は A_k の決め方が適当でありません. 再定義してください. うまく定義できない場合は残念ながら使えません.

$g(k)$ を使うと級数は次の形になります.

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)\cdot A_k.$$

式 (5.2) からも明らかなように,B_l, C_l は $g(k+1)$ と $g(k)$ の比です. 従って以下の式で表されます.

$$\frac{g(k+1)}{g(k)}=\frac{B_k}{C_{k+1}}. \tag{5.6}$$

B_k, C_{k+1} は整数を取るように適当に調整します.

C_{k+1} が求まったら引数 k が $k+1$ から k になるよう C の定義を調整してください. 但し $k=0$ の場合は式 (5.5) で定義したのを使います.

注意　定義からも明らかなように,A_k の取り方によって B_k, C_k は変わります.

例 1　表 5.1 の Ramanujan の式ならば,

$$A_k = 26390k + 1103.$$

が適当でしょう.

$$g(k) = \frac{(4n)!}{(n!)^4 \cdot (4 \cdot 99)^{4n}},$$

$$C_0 = 1/g(0) = 1,$$

$$\frac{g(k+1)}{g(k)} = \frac{\frac{(4k+4)!}{((k+1)!)^4 \cdot (4 \cdot 99)^{4k+4}}}{\frac{(4k)!}{(k!)^4 \cdot (4 \cdot 99)^{4k}}} = \frac{(2k+1)(4k+1)(4k+3)}{(k+1)^3 \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot 99^4}.$$

となります. よって,

$$B_k = (2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_{k+1} = (k+1)^3 \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot 99^4.$$

となります. C_{k+1} の方は係数を調整して,

$$C_k = k^3 \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot 99^4.$$

とします. まとめると,

$$A_k = 26390k + 1103, \quad B_k = (2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot 99^4 & (0 < k). \end{cases}$$

となります.

以上.

例 2　表 5.1 の $\tan^{-1}$ の Tayler 級数は, まず

$$A_k = 1.$$

と取ってみます.

$$g(k) = \frac{(-1)^k}{(2k+1) \cdot x^{2k+1}},$$

$$C_0 = 1/g(0) = x,$$

$$\frac{g(k+1)}{g(k)} = \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)x^{2k+3}}}{\frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}}} = \frac{-(2k+1)}{(2k+3)x^2}.$$

となります. よって,

$$B_k = -(2k+1), \quad C_{k+1} = (2k+3)x^2.$$

となります.C_{k+1} の方は係数を調整して,

$$C_k = (2k+1)x^2$$

とします. まとめると,

$$A_k = 1, \quad B_k = -(2k+1), \quad C_k = \begin{cases} x & (k=0). \\ (2k+1)x^2 & (0 < k). \end{cases}$$

となります.

再び $\tan^{-1}$ の Tayler 級数で，

$$A_k = (-1)^k$$

と取ってみますと，経過は省略してまとめると，

$$A_k = (-1)^k, \quad B_k = 2k+1, \quad C_k = \begin{cases} x & (k=0). \\ (2k+1)x^2 & (0<k). \end{cases}$$

となります．

以上．

A_k, B_k, C_k の諸関係

(a) 二つの級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k), \quad \sum_{k=0}^{\infty} g(k).$$

を次のように合成した場合の A_k, B_k, C_k の関係についてみてみます．

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(k) \cdot g(k))$$

混乱しないように，$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ の A_k, B_k, C_k を $A_{k,f()}, B_{k,f()}, C_{k,f()}$ と書きます．
次の等式がなりたちます．

$$A_{k,f()g()} = A_{k,f()} \cdot A_{k,g()}, \quad B_{k,f()g()} = B_{k,f()} \cdot B_{k,g()}, \quad C_{k,f()g()} = C_{k,f()} \cdot C_{k,g()}.$$

証明は省略 (^^;;

(b) 通分．

式 (5.6) より明らかなように，B_k と C_{k+1} は比例関係が崩れない限り通分&定数倍が可能です．(a) の方法で二つの級数の A_k, B_k, C_k を合成した場合，通分したくなるかもしれないが，比例関係が崩れない限り可能です．但し，C_0 まで通分しないように！

(c) もし，$A_k \not\equiv 1$ であっても次の置き換えを行う事により A_0 以外は 1 にする事が出来ます．

$$A'_0 = A_0, \quad A_k = 1. \quad (1 \le k)$$
$$B'_k = B_k \cdot A_{k+1}. \quad (0 \le k)$$
$$C'_0 = C_0, \quad C'_1 = C_1, \quad C'_k = C_k \cdot A_{k-1}. \quad (2 \le k)$$

証明は代入してみればいい．上記で定義した A'_k, B'_k, C'_k を式 (5.3) と同じ順序で並べる．A'_k は A'_0 以外は 1 ですので省略．

$$\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{C'_0}A'_0 + \frac{1}{C'_0}\frac{B'_0}{C'_1} + \frac{1}{C'_0}\frac{B'_0}{C'_1}\frac{B'_1}{C'_2} + \frac{1}{C'_0}\frac{B'_0}{C'_1}\frac{B'_1}{C'_2}\frac{B'_2}{C'_3} + \cdots \\ &= \frac{1}{C_0}A_0 + \frac{1}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1}\frac{B_1A_2}{C_2A_1} + \frac{1}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1}\frac{B_1A_2}{C_2A_1}\frac{B_2A_3}{C_3A_2} + \cdots \\ &= \frac{1}{C_0}A_0 + \frac{1}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1A_2}{C_2} + \frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1}{C_2}\frac{B_2A_3}{C_3} + \cdots \end{aligned} \tag{5.7}$$

式 (5.7) は式 (5.3) と同じ．

余談 (1)

式 (5.4) では,A_k を分子に掛けていた.

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\prod_{l=0}^{k-1} B_l}{\prod_{l=0}^{k} C_l} \cdot \frac{A_k}{1}.$$

しかし, 分子にではなく, 分母に D_k をかけた方が都合の良い級数があると考えられる方がいらっしゃるかと思います. $\tan^{-1}$ もそうです.

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\prod_{l=0}^{k-1} B'_l}{\prod_{l=0}^{k} C'_l} \cdot \frac{1}{D_k}. \tag{5.8}$$

しかし分母だと後で式の変形上都合が悪いです (^^;;. ここでは分母に掛ける事を考えません.

5.2 新しい計算法

式 (5.3) の A_k, B_k, C_k を使って，式 (5.9) の数列 R_k を考え，式 (5.10) のような “[”, “]”, “:” を使った特別な表記をする [1].

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{1}{C_k}(A_k + B_k(R_{k+1})) \qquad (5.9)\\ &:= [A_k, B_k, C_k] : R_{k+1} \qquad (5.10) \end{aligned}$$

級数 (5.2) の L 項までの和 S_L は，$R_L = 0$ とした時の R_0 の値です．式 (5.3) を次のように変形すると理解いただけると思う.

$$S_3 = \frac{1}{C_0}(A_0 + B_0 \cdot \frac{1}{C_1}(A_1 + B_1 \cdot \frac{1}{C_2}(A_2 + B_2 \cdot \frac{1}{C_3}(A_3 + B_3 \cdot 0)))).$$

$$S_3 = R_0 = \frac{1}{C_0}(A_0 + B_0 R_1), \quad R_1 = \frac{1}{C_1}(A_1 + B_1 R_2), \quad R_2 = \frac{1}{C_2}(A_2 + B_2 \cdot 0). \quad (R_3 = 0)$$

要素 $[A_k, B_k, C_k]$ を ϕ_i と略記すると，S_L は式 (5.11) のように表記できる.

$$\begin{aligned} S_L &= [A_0, B_0, C_0] : [A_1, B_1, C_1] : \cdots : [A_{L-1}, B_{L-1}, C_{L-1}] : R_L, \quad (R_L = 0)\\ &= \phi_0 : \phi_1 : \phi_2 : \cdots : \phi_{L-1} : 0. \qquad (5.11) \end{aligned}$$

次に R_k と R_{k+2} との間には次の関係がある.

$$\begin{aligned} R_k &= \phi_k : \phi_{k+1} : R_{k+2},\\ &= \phi_k : (\phi_{k+1} : R_{k+2}), \qquad (5.12)\\ &= \phi_k : (\frac{1}{C_{k+1}}(A_{k+1} + B_{k+1} R_{k+2})),\\ &= \frac{1}{C_k}(A_k + B_k(\frac{1}{C_{k+1}}(A_{k+1} + B_{k+1} R_{k+2}))),\\ &= \frac{1}{(C_k C_{k+1})}((A_k C_{k+1} + B_k A_{k+1}) + (B_k B_{k+1}) R_{k+2}),\\ &= [A_k C_{k+1} + B_k A_{k+1}, B_k B_{k+1}, C_k C_{k+1}] : R_{k+2}, \qquad (5.13)\\ &= (\phi_k : \phi_{k+1}) : R_{k+2}. \qquad (5.14) \end{aligned}$$

[1] 原論文 [60] では，“[”, “]” ではなく “(”, “)” が使われていた．通常の括弧と混ざると間際らしいので変更した

式 (5.13) と (5.14) により，

$$(\phi_k : \phi_{k+1}) = [A_k C_{k+1} + B_k A_{k+1}, B_k B_{k+1}, C_k C_{k+1}].$$

という関係がある．つまり隣接する ϕ_k, ϕ_{k+1} は統合する事ができる．

これを一般化すると，“:” は次のような 2 項演算子とみなす事ができる．

$$([a, b, c] : [A, B, C]) = [aC + Ab, bB, cC].$$

また，(5.12) と (5.14) により，隣接していれば任意の順序で計算できる．

$$\phi_k : (\phi_{k+1} : R_{k+2}) = (\phi_k : \phi_{k+1}) : R_{k+2}.$$

以上より，隣接していれば，任意の順序で “:” を計算する事ができる．例えば，隣接していれば以下のようにどのような順序で計算してもよい．

$$\begin{aligned} S_L &= \phi_0 : \phi_1 : \phi_2 : \phi_3 : \phi_4 : 0. \\ &= (\phi_0 : \phi_1) : (\phi_2 : \phi_3) : \phi_4 : 0. \\ &= \phi_0 : (\phi_1 : \phi_2) : (\phi_3 : \phi_4) : 0. \end{aligned}$$

注意　交換法則は成り立たない．$(\phi_0 : \phi_1) \neq (\phi_1 : \phi_0)$.

実際の計算では，ϕ_k の数を 2^n にして，Tree 構造のように再帰的に 2 分割していくと効率が良い． この場合の Tree の深さは $\log n$ になる．個数が 2^3 個の時は次の通り．

$$S_8 = (((\phi_0 : \phi_1) : (\phi_2 : \phi_3)) : ((\phi_4 : \phi_5) : (\phi_6 : \phi_7))) : 0.$$

例　$\pi/6 = \sin^{-1}(1/2)$ の計算例をあげる. 同時に, 次章の計算量を求めるための前提となる事を調べてみる.

$$\sin^{-1}\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}.$$

$$A_k = 1,\ \ B_k = (2k+1)^2, \quad C_k = \begin{cases} x & (k=0). \\ 2k(2k+1)x^2 & (0 < k). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi/6 &= \sin^{-1}(1/2) \\ &= \frac{1}{C_0}(A_0 + \frac{B_0}{C_1}(A_1 + \frac{B_1}{C_2}(A_2 + \frac{B_2}{C_3}(A_3 + \frac{B_3}{C_4}(A_4 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{24}(1 + \frac{9}{80}(1 + \frac{25}{168}(1 + \frac{49}{288}(1 + \cdots \end{aligned}$$

$S_8(\doteqdot \pi/6)$ まで計算する．隣り合っている二つづつを順次統合していく．

$$\begin{aligned} S_8 &= [1,2,1] : [1,9,24] : [1,25,80] : [1:49,168] : [1,81,288] : [1,121,440] : [1,169,624] : [1,225,840] : 0, \\ &= [25,9,48] : [193,1225,13440] : [521,9801,126720] : [1009,38025,524160] : 0, \\ &= [337737,11025,645120] : [282976569,372683025,66421555200] : 0, \\ &= [22436136605255625,4108830350625,42849873690624000] : 0, \\ &= 22436136605255625/42849873690624000, \\ &= 0.52359866372639707619\cdots, \end{aligned}$$

$$\pi \doteqdot 6 \cdot S_8 = 3.14159198235838245714 \cdots.$$

この計算を観察していると, 上の行から下の行に移るたびに, 項が統合され項数が半分になり, それぞれの項の要素の数の桁数がだいたい 2 倍になっている事がわかると思う.

最後残った項の A_k/C_k を計算して，級数の値を求めている．

逆に，下の行から上の行に移るたびに，それぞれの項の要素の桁数がだいたい 1/2 になり，項数が 2 倍になっている事がわかると思う.

以上.

5.3 計算量

さて，新しい級数の計算量を調べて見る．

話しを簡単にするために，計算する級数の項数は $N = 2^n$ 個とする． 次に，項の統合で行われる加減算及び，最後に一度だけ行われる割算は計算量の論議からは無視する．項の統合で行われる掛け算のみを計算量の論議の対象とする．

A_k, B_k, C_k の最大桁数を L とする．

K 桁同士の 2 つの数の掛け算の計算量は $O(M(K))$ とする．1 回の項の統合には 4 回の L 桁同士の掛け算が行われるが，定数倍にすぎないので論議の対象外とする．

前提条件は以上である．では論議に入る．

前項の例で見てみたように，項の統合が行われると，項数が 1/2 になり，各項の要素の桁数が 2 倍になる．

- 項数が 2 個の時の計算量は，$O(M(L))$ である．
- 項数が 4 個の時の計算量は，$O(2 \cdot M(L) + M(2L))$ である．
- 項数が 8 個の時の計算量は，$O(4 \cdot M(L) + 2 \cdot M(2L) + M(4L))$ である．
- 項数が 2^n 個の時の計算量は，$O\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i} \cdot M(2^i L)\right)$ である．

ここで，K 桁同士の掛け算の計算量は $M(K) = K^2$ だったとしよう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i}(2^i L)^2 &= \frac{2^n K^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{2^n K^2}{2} \cdot (2^n - 1), \\ &\doteqdot O((2^n \cdot K)^2) \doteqdot O((N \cdot K)^2).\end{aligned}$$

K の最大桁は L だから，項数 N の時の計算量は $O((NL)^2)$.

次に，$M(K) = K \log_2(K)$ だったとしよう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i} \cdot (2^i K)\log_2(2^i K) &= \frac{2^n K}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \log_2(2^i K), \\ &= \frac{2^n K}{2}\sum_{i=0}^{n-1} (\log_2(2^i) + \log_2(K)), \\ &= \frac{2^n K}{2}\sum_{i=0}^{n-1} (i + \log_2(K)),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^n K}{2}\left(n\log_2(K)+\sum_{i=0}^{n-1} i\right),\\
&= \frac{2^n K}{2}\left(n\log_2(K)+\frac{n(n-1)}{2}\right),\\
&\doteq O\left(\frac{NK}{2}(n\log_2(K)+n^2)\right),\\
&\doteq O\left(N\log_2(N)^2\cdot K\right).\quad (n=\log_2(N))
\end{aligned}
$$

つまり，項数 N の時の計算量は $O(NL(\log N)^2)$．

(あれ? 原論文では $O(N(\log N)^3)$ と結論ずけられていたのだが，どっか間違っているかも．)

したがって，掛け算を，筆算と同じ $O(N^2)$ のアルゴリズムで計算した場合の計算量は，$O((NL)^2)$． 掛け算を，計算量が $O(N\log(N))$(例えば FFT) のアルゴリズムを使った場合の計算量は $O(NL(\log N)^2)$ となる．

余談 (2)

ここで定義されている A_k, B_k, C_k と連分数との関係を調べて見よう．

前提として，次の級数と連分数は同値です．証明は容易でしょう．

$$
\begin{aligned}
S &= a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+a_0a_1a_2a_3+a_0a_1a_2a_3a_4, &(5.15)\\
&= \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{1+a_3-\cfrac{a_4}{1+a_4}}}}}. &(5.16)
\end{aligned}
$$

始めに $A_k\equiv 1$ の場合を考える．すると級数は以下のようになる．

$$
S_L = \frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}+\frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1}{C_2}+\frac{1}{C_0}\frac{B_0}{C_1}\frac{B_1}{C_2}\frac{B_2}{C_3}+\cdots
$$

式 (5.15) と比較すると，

$$
a_0=\frac{1}{C_0},\quad a_1=\frac{B_0}{C_1},\quad a_2=\frac{B_1}{C_2},\quad a_3=\frac{B_2}{C_3},\quad a_4=\frac{B_3}{C_4}. \tag{5.17}
$$

これを，連分数 (5.16) に代入してみる．

$$
S = \cfrac{1/C_0}{1-\cfrac{B_0/C_1}{1+B_0/C_1-\cfrac{B_1/C_2}{1+B_1/C_2-\cfrac{B_2/C_3}{1+B_2/C_3-\cfrac{B_3/C_4}{1+B_3/C_4}}}}}.
$$

整理すると，

$$
S = \cfrac{1}{C_0-\cfrac{C_0B_0}{C_1+B_0-\cfrac{C_1B_1}{C_2+B_1-\cfrac{C_2B_2}{C_3+B_2-\cfrac{C_3B_3}{C_4+B_3}}}}}. \tag{5.18}
$$

となります.

次は $A_k \not\equiv 1$ の場合を考える．各項で前項の A_k を打ち消せば $A_k \equiv 1$ の時とほぼ同等に扱える．次のようになる．

$$S_L = \frac{A_0}{C_0} + \frac{A_0}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1A_0} + \frac{A_0}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1A_0}\frac{B_1A_2}{C_2A_1} + \frac{A_0}{C_0}\frac{B_0A_1}{C_1A_0}\frac{B_1A_2}{C_2A_1}\frac{B_2A_3}{C_3A_2} + \cdots$$

式 (5.15) と比較すると，

$$a_0 = \frac{A_0}{C_0}, \quad a_1 = \frac{B_0A_1}{C_1A_0}, \quad a_2 = \frac{B_1A_2}{C_2A_1}, \quad a_3 = \frac{B_2A_3}{C_3A_2}, \quad a_4 = \frac{B_3A_4}{C_4A_3}.$$

これを，式 (5.18) と比較して，

$$B'_0 = B_0A_1, \quad B'_1 = B_1A_2, \quad B'_2 = B_2A_3, \quad B'_3 = B_3A_4.$$

$$C'_0 = C_0/A_0, \quad C'_1 = C_1A_0, \quad C'_2 = C_2A_1, \quad C'_3 = C_3A_2, \quad C'_4 = C_4A_3.$$

この A'_k, B'_k, C'_k を式 (5.18) の連分数の A_k, B_k, C_k と同じ場所に置いていくと,

$$S = \cfrac{1}{(C_0/A_0) - \cfrac{(C_0/A_0)B_0A_1}{C_1A_0 + B_0A_1 - \cfrac{C_1A_0B_1A_2}{C_2A_1 + B_1A_2 - \cfrac{C_2A_1B_2A_3}{C_3A_2 + B_2A_3 - \cfrac{C_3A_2B_3A_4}{C_4A_3 + B_3A_4}}}}}.$$

整理すると,

$$S = \cfrac{A_0}{C_0 - \cfrac{A_1B_0C_0}{A_0C_1 + B_0A_1 - \cfrac{A_0A_2B_1C_1}{A_1C_2 + B_1A_2 - \cfrac{A_1A_3B_2C_2}{A_2C_3 + B_2A_3 - \cfrac{A_2A_4B_3C_3}{A_3C_4 + B_3A_4}}}}}.$$

今までみてきたように, 級数から A_k, B_k, C_k を求めると, 同時に連分数も求まる.

追記 (2000/2/18): 連分数への拡張については参考文献 [57] が詳しい。

5.4 A_k, B_k, C_k, S_L の例

前提として，組合せの分野で使われる「多項定理」について述べておきます．2 項定理を拡張した，多項定理

$$(a + b + \cdots + l)^k = \sum \frac{k!}{p!q!\cdots t!} a^p b^q \cdots l^t. \quad (p + q + \cdots + t = k)$$

が存在します． この定理は別の見方をすると $p + q + \cdots + t = k$ という条件が成立すると $k!/(p!q!\cdots t!)$ が整数 になるということを示しています．この事実をおぼえていると便利です.

(a) 2 項係数

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k},$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = 2(2k+1), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k & (0<k). \end{cases}$$

(a) 2 項係数の逆数

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{\binom{2k}{k}},$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = (k+1), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ 2(2k-1) & (0<k). \end{cases}$$

(b)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k}^3,$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = (2(2k+1))^3, \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 & (0<k). \end{cases}$$

(c)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(4k)!}{(k!)^4},$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = 8(2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 & (0<k). \end{cases}$$

本式は $k+k+k+k=4k$ なので整数になる.

(d)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3},$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = 8(6k+1)(6k+3)(6k+5), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 & (0<k). \end{cases}$$

本式は $3k+k+k+k=6k$ なので整数になる.

(f)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(2k)!(3k)!}{(k!)^5},$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = 6(2k+1)(3k+1)(3k+2), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 & (0<k). \end{cases}$$

本式は $\frac{(2k)!(3k)!}{(k!)^5} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(3k)!}{(k!)^3}$ なので整数になる.

(f)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^k,$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = -1 \quad C_k \equiv 1 \quad \text{もしくは} \quad A_k \equiv 1, \quad B_k \equiv 1 \quad C_k = -1.$$

(g)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} x^{2k} \quad (x \text{ は整数の定数})$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ x^2 & (0<k) \end{cases}, \quad C_k \equiv 1.$$

(h)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} x^{(yk)}, \quad (x, y \text{ は整数の定数}) \quad A_k \equiv 1, \quad B_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ x^y & (0<k) \end{cases}, \quad C_k \equiv 1.$$

(i)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{x^{2k}}, \quad (x \text{ は整数の定数})$$

$$A_k \equiv 1, \quad B_k \equiv 1, \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ x^2 & (0<k). \end{cases}$$

(j)

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{x^{(yk)}}, \quad (x, y \text{ は整数の定数}) \quad A_k \equiv 1, \quad B_k \equiv 1, \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ x^y & (0<k). \end{cases}$$

(k) 一般化のために以下の例もあげる．

$$S_L = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{xk+y}{1}, \quad (x, y \text{ は整数の定数}) \quad A_k = xk+y, \quad B_k \equiv 1, \quad C_k \equiv 1.$$

(l) Ramanujan の式を再掲．

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{26390n+1103}{(4\cdot 99)^{4n}}.$$

つぎのように分解．

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{(4n)!}{(n!)^4}}^{P(n)} \cdot \overbrace{\frac{26390n+1103}{1}}^{Q(n)} \cdot \overbrace{\frac{1}{(4\cdot 99)^{4n}}}^{R(n)}.$$

$$A_{k,P()} \equiv 1, \quad B_{k,P()} = 8(2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_{k,P()} = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3 & (0<k). \end{cases}$$

$$A_{k,Q()} = 26390k+1103, \quad B_{k,Q()} \equiv 1, \quad C_{k,Q()} \equiv 1.$$

$$A_{k,R()} \equiv 1, \quad B_{k,R()} \equiv 1, \quad C_{k,R()} = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ (4\cdot 99)^4 & (0<k). \end{cases}$$

上記 3 つを合成して，

$$A_k = 26390k+1103, \quad B_k = 8(2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3\cdot(4\cdot 99)^4 & (0<k). \end{cases}$$

通分して，

$$A_k = 26390k+1103, \quad B_k = (2k+1)(4k+1)(4k+3), \quad C_k = \begin{cases} 1 & (k=0). \\ k^3\cdot 2\cdot 4^2\cdot 99^4 & (0<k). \end{cases}$$

第6章　その他

6.1　入手可能な円周率の高精度計算プログラム

Mathematica 等の数式処理システムも超高精度の円周率の計算ができるが，専用ソフトにはかないません．

有名な所では，東京大学金田研究室による，“SuperPI” が挙げられる．次の URL で配付されていたが，現在はリンク切れで入手できない．

(リンク切れ) `ftp://www.cc.u-tokyo.ac.jp/`
(参考) `https://ja.wikipedia.org/wiki/スーパー` π

京都大学の大浦托哉氏が配付している計算プログラムは “SuperPI” より早く計算できるようである．次の URL で配付されている．

`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~oura/pi_fft-j.html`

パソコンで実行可能なプログラムで一番高速なのは Alexander J. Yee 氏の配布している “y-cruncher” のようである．

`http://www.numberworld.org/y-cruncher/`

このプログラムを使い 2020 年 1 月に Timothy Mullican 氏により 50 兆桁の計算が行われている．現時点 (2021/8/14) での世界記録です．

`https://blog.timothymullican.com/calculating-pi-my-attempt-breaking-pi-record`

6.2　計算機による円周率の計算記録

スーパーコンピュータによるものは筑波大学の高橋大介助氏による 2009 年の記録更新が最後です．それ以降はパソコンによるものが多い．

表 6.1 に 20 世紀の計算機記録一覧を挙げる．参考文献 [7, 50] より．21 世紀以降は次のサイトを参考にしてほしい．

`https://円周率.jp/history/computer.html`
`https://ja.wikipedia.org/wiki/円周率の歴史#計算機による計算の時代`

表中の公式の略号と式番号の対応は次の通り．M:Machin の公式 (1.6), S:Störmer の公式 (1.9), G:Gauss の公式 (1.7), K:Klingenstierna の公式 (1.8), L:E.Salamin と R.P.Breant の公式 (1.14), R:Ramanujan の公式 (1.12), B2:Borwein 兄弟の公式 (1.15), B4:Borwein 兄弟の公式 (1.16), C:Chudnovskys 兄弟の公式 (1.13).

表 6.1: 計算機による π の計算記録 (20 世紀)

氏名	使用機種 (国名)	年・月	精度 (計算桁数)	CPU 使用時間	使用公式
リトワイズナー等	ENIAC(米)	1949	2037 (2040)	～70h (～70h)	M(M)
ニコルソン，ジーネル	NORC(米)	1954	3092 (3093)	13 分 (13 分)	M(M)
ファルトン	Pegasus(米)	1957	7480 (10021)	33 時間 (33 時間)	K(G)
ジェニュイス	IBM 704(米)	1958	10000 (10000)	1h40m (1h40m)	K(G)
フェルトン	Pegasus(米)	1958	7480 (10021)	33h (33h)	K(G)
ギュー	IBM 704(米)	1959	16167 (16167)	4h18m (4h18m)	M(M)
シャンクス, レンチ	IBM 7090(米)	1961	100265 (100265)	8h43m (4h22m)	S(G)
ギュー, フィリャトル	IBM 7030(米)	1966	250000 (250000)	41h55m (24h35m)	G(S)
ギュー, ディシャン	CDC 6600(米)	1967	500000 (500000)	28h10m (16h35m)	G(S)
ギュー, ブーエ	CDC 7600(米)	1973	1001250 (1001250)	23h18m (13h40m)	G(S)
三好, 金田	FACOM M-200(日)	1981	2000036 (2000040)	137h18m (143h18m)	K(M)
ギュー	不詳	1981-82	2000050 (不詳)	不詳 (不詳)	不詳 (不詳)
田村	MELCOM 900II(日)	1982	2097144 (2097152)	7h14m (2h21m)	L(L)
田村，金田	HITAC M-280H(日)	1982	4194288 (4194304)	2h21m(6h52m)	L(L)
田村，金田	HITAC M-280H(日)	1982	8388576 (8388608) (8388608)	6h52m (30h 以上)	L(L)
金田，吉野，田村	HITAC M-280H(日)	1983	(16777216) (16777216)	30h 以上 (6h52m)	L(L)
後，金田	HITAC S-810/20(日)	1983.10	10013395 (10013400)	24h 以下 (30h 以上)	G(L)
ゴスパー	Symbolics 3670(米)	1985.10	17526200 (17526200 以上)	不詳 (28h)	R(B4)
ベイリー	CRAY-2(米)	1986.1	29360111 (29360128)	28h (40h)	B4(B2)
金田，田村	HITAC S-810/20(日)	1986.9	33554414 (33554432)	6h36m (23h)	L(L)
金田，田村	HITAC S-810/20(日)	1986.10	(67108864) (67108864)	23h (35h15m)	L(L)
金田，田村，久保 等	NEC SX-2(日)	1987.1	134214700 (134214728)	35h15m(48h2m)	L(B2)
金田，田村	HITAC S-820/80(日)	1988.1	201326551 (201326572)	35h15m(48h2m)	L(B4)
D.V.Chudnovsky G.V.Chudnovsky	CRAY-2(米) IBM-3090/VF(米)	1989.5	4800000000 以上 (4800000000?)	～6ヶ月?(不詳)	C(C)
D.V.Chudnovsky G.V.Chudnovsky	IBM-3090(米)	1989.5	535339270 以上 (535339270?)	1ヶ月以上?(不詳)	C(不詳)
金田，田村	HITAC S-820/80(日)	1989.7	536870898 (53687012)	68h13m(80h39m)	L(B4)
D.V.Chudnovsky G.V.Chudnovsky	IBM-3090(米)	1989.8	1011196691? (1011196691 以上)	2ヶ月以上?(不詳)	C(C)
金田，田村	HITAC S-820/80(日)	1989.11	1073741799 (1073741824)	74h30m(85h57m)	L(B4)
D.V.Chudnovsky G.V.Chudnovsky	Homebrew computer	1991.8	2260000000(不詳)	不詳 (不詳)	C(C)
高橋，金田	HITAC S-3800/480(日)	1995.6	3221220000 (3221225472)	36m53(53h44m)	B4(L)
高橋，金田	HITAC S-3800/480(日)	1995.8	4294960000 (4294967296)	113h42m(130h21m)	B4(L)
高橋，金田	HITAC S-3800/480(日)	1995.10	6442450000 (6442450944)	116h39m(131h41m)	B4(L)
D.V.Chudnovsky G.V.Chudnovsky	Homebrew computer	1996.3	8000000000? (8000000000 以上)	1 週間 (不詳)	C(C)
高橋，金田	HITAC SR2201(日)	1997.4	17179869184 (17179869142)	5h11m(5h26m)	L(B4)
高橋，金田	HITAC SR2201(日)	1997.5	34359738327 (34359738368)	15h4m(20h34m)	B4(L)
高橋，金田	HITAC SR2201(日)	1997.8	51539600000 (51539607552)	29h4m(37h9m)	B4(L)
高橋，金田	HITAC SR2201(日)	1997.8	51539600000 (51539607552)	29h4m(37h9m)	B4(L)
高橋，金田	HITAC SR8000(日)	1999.4	68719470000 (68719470000)	32h54m(39h21m)	L(B4)
高橋，金田	HITAC SR8000(日)	1999.9	206158430000 (206158430000)	37h21m(46h7m)	L(B4)

表 6.2: Mathematica 3.0 の関数との対応

$\sum_{\mathrm{n=s}}^{\mathrm{e}} f(n)$	`Sum[f[n],{n,s,e}]`
$\prod_{\mathrm{n=s}}^{\mathrm{e}} f(n)$	`Product[f[n],{n,s,e}]`
$\sum_{\mathrm{n=s}}^{\mathrm{e}} f(n)$	`Sum[f[n],{n,s,e}]`
$\binom{m}{n}$	`Binomial[n,m]`
$(a)_n$	`Pochhammer[a,n]`
${}_pF_q(\cdots;\cdots;x)$	`HypergeometricPFQ[{...},{...},x]`
$RE(x), IM(x), i$	`RE[x], IM[x], I`
$\sin(x), \cos(x), \cdots, \log(x)$	`Sin[x], Cos[x],..., Log[x]`
$n!, n!!$	`n!, n!!` (同じ)

6.3 Mathematica

ほとんどの円周率の公式の検証には，Mathematica を使用した．数式処理ソフト Mathematica の代表的な関数．表 6.2.

6.4 言葉の説明

AGM 算術幾何平均.

整数

有理数

無理数

超越数

代数的数

6.5 数学記号

高校数学で扱わない記号のみ挙げています.

$O(f(n))$ **:計算量**

計算量．情報科学の分野ではよく使われる概念です．$f(n)$ は正の値をとります.

$O(n\log n)$, $O(n(\log n)^2)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$ など．例えば,

「$\tan^{-1}\frac{1}{5}$ の計算量は $O(n^2)$」

と記述されていた場合は,「$\tan^{-1}\frac{1}{5}$ を n 桁計算すると n^2 に比例する時間が必要.」という意味です.比例定数は実測して求める必要があります.

もし $\tan^{-1}(1/5)$ を 10 桁計算するのに 1 秒かかったとします.

$$O(10^2) = C \cdot (10^2) = 1[\text{秒}]$$

比例定数 C は 1/100 です．よって，計算時間は以下の式で表されます.

$$n^2/100[\text{秒}]$$

100 桁計算するのにかかる時間は $100^2/100 = 100$[秒] かかります．100000 桁計算するのにかかる時間は，$100000^2/100 = 100000000$[秒] ですので，1 億秒!かかります.

注意点として，もし計算量が同じ $O(n^2)$ であっても，比例定数 C が異なると計算時間が異なります.

次に，計算量 $O(f(n))$ は実測で求められる事はまれで，紙の上の論議で求める事がほとんどです．裏返すと実際の計算には起こりうるさまざまな阻害要因が考慮されてません．実際の計算時間を反映していない事があります.

対数 log は「底」($\log_{10}, \log_2$ の 10,2 など) が異なっても,「底の交換法則」により $\log_{10} n = \log_2 n / \log_2 10$ という関係があるので比例定数 $1/\log_2 10$ しか異なりません．それで計算量の論議では通常「底」は無視して考えます.

$\displaystyle\sum_{i=n}^{m} k_i$ **:総和記号**

級数の一般項を表すのに使います．$\sum$ の下の添字から上の添字の範囲の項をすべて加える.

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

$$\sum_{i=n}^{m} k_i = k_n + k_{n+1} + k_{n+2} + \cdots + k_m.$$

円周率を表す有理数係数の級数の場合，上の添字は必ず ∞ になっています．有限級数では円周率を表す事はできません.

数値計算をする場合，上の添字が ∞ の時は，ほとんどの場合，$\lim_{i\to\infty} k_i$ がゼロに収束するので，有効精度以上にゼロに近くなったらそこで打ち切ればよい.

$\displaystyle\prod_{i=n}^{m} k_i$ **:総乗記号**

級数の一般項を表すのに使います．$\prod$ の下の添字から上の添字の範囲の項をすべてかけ算をする.

$$\prod_{i=1}^{4} (i^2 + 3) = (1^2 + 3) \cdot (2^2 + 3) \cdot (3^2 + 3) \cdot (4^2 + 3) = 6384.$$

$$\prod_{i=n}^{m} k_i = k_n \cdot k_{n+1} \cdot k_{n+2} \cdots k_m.$$

総和記号同様，円周率を表す有理数係数の級数の場合，上の添字が必ず ∞ になっています．有限級数では円周率を表す事はできません.

数値計算をする場合，上の添字が ∞ の時はほとんどの場合，$\lim_{i\to\infty} k_i$ が 1 に収束するので，有効精度以上に 1 に近くなったらそこで打ち切ればよい．(本当かな？　間違っていたらごめんね．)

$n!$: 階乗

一つおきのかけ算.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2.$$

$2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $\cdots$ 例外として $0! = 1! = 1$.

$n!!$: 二重階乗

二つおきのかけ算.

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 2 & : n \text{ が偶数のとき.} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 1 & : n \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

例外として $(-1)!! = 0!! = 1!! = 1$.

$(a)_n$: Pochhammer 記号

$$(a)_m = \prod_{n=0}^{m-1} (a+n) = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+m-1).$$

例外として $(a)_0 = 1$, $(1)_n = n!$. 分数の場合も定義される.

$$\left(\frac{b}{a}\right)_m = \prod_{n=0}^{m-1} \frac{an+b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{2a+b}{a} \cdots \frac{(m-1)a+b}{a}.$$

通分可能.

$$\left(\frac{k \cdot b}{k \cdot a}\right)_m = \left(\frac{b}{a}\right)_m.$$

$\binom{n}{r}$: 二項係数

$$\binom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

実数にも拡張できる. r は自然数, n は実数

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}.$$

${}_pF_q(\cdots;\cdots;z)$: 超幾何関数

$${}_1F_1(a;b;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad \text{(合流型超幾何関数)}$$

$${}_0F_1(\,;a;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a)_n n!} = \lim_{q \to \infty} {}_1F_1(q;a;z/q).$$

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

$${}_pF_q(a_1, a_2 \cdots a_p; b_1, b_2, \cdots b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

$${}_2F_1(-p,1;1;-x) = (1+x)^p. \quad {}_2F_1(1,1;2;-x) = \frac{\log(1+x)}{x}. \quad \lim_{n \to \infty} {}_2F_1(1,n;1;x/n) = e^x.$$

円周率の級数を扱いやすくするために, 次の関数を定義する.

$$R_s\,(n) = \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2}+s)_n(\frac{1}{2}-s)_n}{(1)_n(1)_n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

以上，難しそうな式が並んでいるが，公式集には R_s しか出て来ませんので.

i: 虚数単位

$RE(X)$: 実数部 X を複素数として，$RE(X)$ は実数部.

$IM(X)$: 虚数部 :X を複素数として，$IM(X)$ は虚数部である.

$\overline{X}$:共役複素数

$\exp(x)$: 指数関数

指数関数を $\exp(x) := e^x$ と書く．三角関数と指数関数との関係,「Euler の恒等式」

$$\exp(xi) = \cos(x) + i\sin(x).$$

は忘れてはならない.

6.6 級数の一般項について

級数の一般項を表すために複雑な関係式が使われている事が多い．ここでは代表的な物を挙げる．円周率の公式は，文献によっては展開した形で掲載されている事も多い．一般項を推測するのにも役に立つと思う.

6.6.1 偶数の積

$$n! \cdot 2^n = (2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(2\cdot n) = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = (2n)!!.$$

$$n=0 \to 1,\quad n=1 \to 2,\quad n=2 \to 2\cdot 4,\quad n=3 \to 2\cdot 4\cdot 6.$$

4 の倍数の積.

$$n! \cdot 4^n = (4\cdot 1)(4\cdot 2)(4\cdot 3)\cdots(4\cdot n) = 4\cdot 8\cdot 12\cdots(2n).$$

$$n=0 \to 1,\quad n=1 \to 4,\quad n=2 \to 4\cdot 8,\quad n=3 \to 4\cdot 8\cdot 12.$$

6.6.2 奇数の積

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n} = \frac{1\cdot(2)\cdot 3\cdot(4)\cdot 5\cdot(6)\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = (2n-1)!!.$$

$$n=0 \to 1,\quad n=1 \to 1,\quad n=2 \to 1\cdot 3,\quad n=3 \to 1\cdot 3\cdot 5.$$

6.6.3 奇数の積/偶数の積

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{1}{n!\cdot 2^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}.$$

$$n=0 \to \frac{1}{1},\quad n=1 \to \frac{1}{2},\quad n=2 \to \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\quad n=3 \to \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}.$$

6.6.4　階乗の後ろ半分

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} = (n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n) = (n+1)_n.$$
$$n=0\to 1,\quad n=1\to 2,\quad n=2\to 3\cdot 4,\quad n=3\to 4\cdot 5\cdot 6.$$

6.6.5　二項係数

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{(n+1)_n}{n!}.$$
$$n=0\to 1,\quad n=1\to 2,\quad n=2\to 6,\quad n=3\to 20.$$

6.6.6　Pochhammer 記号

$$(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots}{2\cdot 2\cdot 2\cdots} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}}{2^n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{n!}{2^{2n}}.$$

6.6.7　超幾何関数の各項

超幾何級数の各項は Ramanujan 型級数の各項の係数になっている事がある．超幾何関数そのものが円周率の級数に現われるわけではない．

超幾何級数 ${}_3F_2(\frac{a_u}{a_l},\frac{b_u}{b_l},\frac{c_u}{c_l};1,1;z)$ の第 n 項目の係数．

$$\frac{(\frac{a_u}{a_l})_n(\frac{b_u}{b_l})_n(\frac{c_u}{c_l})_n}{(n!)^3} \quad = \quad \left(\prod_{m=0}^{n-1}\frac{m\cdot a_l+a_u}{a_l(m+1)}\right)\left(\prod_{m=0}^{n-1}\frac{m\cdot b_l+b_u}{b_l(m+1)}\right)\left(\prod_{m=0}^{n-1}\frac{m\cdot c_l+c_u}{c_l(m+1)}\right).$$
$$(0<a_u<a_l,\quad 0<b_u<b_l,\quad 0<c_u<c_l)$$

一般化した式は上記のようにとても難しそうな式であるが，展開してみれば，たいして難しい式ではない．良く観察すれば，関係は分かると思う．

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_0\,(n) = 1+[\frac{1}{2}]^3+[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}]^3+[\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}]^3+[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}]^3+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{1/6}\,(n) = 1+(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})+(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6})(\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6})+(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})(\frac{1\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 6\cdot 9})(\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9})+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{1/4}\,(n) = 1+(\frac{1}{4})(\frac{1}{2})(\frac{3}{4})+(\frac{1\cdot 4}{4\cdot 8})(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})(\frac{3\cdot 7}{4\cdot 8})+(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12})(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})(\frac{3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12})+\cdots$$

$$R_0\,(n) = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\right)^3 = \left(\frac{\binom{2n}{n}\frac{n!}{2^{2n}}}{n!}\right)^3 = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\right)^3.$$

表 6.3: 数表

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
$n!!$	1	1	2	3	8	15	48	105
$\binom{2n}{n}$	1	2	6	20	70	252	924	3432
$n!\cdot 2^n$	1	2	8	48	384	3840	46080	645120
$n!\cdot 4^n$	1	4	32	384	6144	122880	2949120	82575360
$\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$	1	1	3	15	105	945	10395	135135
$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{231}{1024}$	$\frac{429}{2048}$
$\frac{(2n)!}{n!}$	1	2	12	120	1680	30240	665280	17297280
R_0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{125}{4096}$	$\frac{42875}{2097152}$	$\frac{250047}{16777216}$	$\frac{12326391}{1073741824}$	$\frac{78953589}{8589934592}$
$R_{1/4}$	1	$\frac{3}{32}$	$\frac{315}{8192}$	$\frac{5775}{262144}$	$\frac{7882875}{536870912}$	$\frac{183324141}{17179869184}$	$\frac{36074117079}{4398046511104}$	$\frac{922887397575}{140737488355328}$
$R_{1/3}$	1	$\frac{5}{72}$	$\frac{385}{13824}$	$\frac{425425}{26873856}$	$\frac{1301375075}{123834728448}$	$\frac{7547975435}{990677827584}$	$\frac{90085086816725}{15407021574586368}$	$\frac{5179498533856075}{1109305553370218496}$

$$R_{1/6}\left(n\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3} = \frac{(2n)!(3n)!}{2^{2n}3^{3n}(n!)^5}.$$

$$R_{1/3}\left(n\right) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{3}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} = \frac{(6n)!}{(3n)!\cdot(12^n\cdot n!)^3}.$$

$$\begin{aligned}
R_{1/4}\left(n\right) &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{2}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3}, \\
&= \frac{(1\cdot2\cdot3)((4+1)(4+2)(4+3))\cdots(((n-1)4+1)((n-1)4+2)((n-1)+3))}{(4^n)^3\cdot(n!)^3}, \\
&= \frac{\frac{(4n)!}{4^n\cdot n!}}{(4^n)^3\cdot(n!)^3} = \frac{(4n)!}{((4^n)\cdot(n!))^4}.
\end{aligned}$$

6.7 三角関数

第 1.3.3 節の表 1.1 に挙げている Euler による ζ 関数と類似の関数の証明に必要な式を列挙している．Mathematica を使っても，数学を知らないと数式は証明できませんよ :-)．

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}. \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}. \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x.$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y. \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x}.$$

$\tan x = t$ と置くと，

$$1+t^2 = \cos^{-2} x = \sec^2 x. \quad 1+t^{-2} = \sin^{-2} x = \csc^2 x.$$

$$\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^{-2}} = \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x} = \cos(2x).$$

6.8 級数と連分数の関係式

次の級数と連分数は同値です．証明は容易でしょう．

$$S = a_0 + a_0a_1 + a_0a_1a_2 + a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1a_2a_3a_4, \tag{6.1}$$

$$= \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1 + a_1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cfrac{a_4}{1 + a_4}}}}}. \tag{6.2}$$

あとがき

さて，いかがだったでしょうか？ 完全に著者の趣味で作り上げた公式集です．

著者は大学に勤めてますが，数学は高等学校までの教育しか受けていません．高度な数学的な質問は御遠慮ください (^^; ;．数式が大量に掲載されてますが，著者も証明を理解していない式がほとんどです．代わりに，公式には可能な限り出典の参考文献を付けています．証明が必要な方は出典の方を御参考にしてください．

ただし，誤りの指摘は歓迎いたします．

著者は円周率の公式を蒐集してます．本文に取り上げた公式以外でご存じの公式がございましたらご連絡ください．そのときにはできるだけ出典をあげていただけるようお願いします．また自作の公式の場合は証明をお願いいたします．

ちなみに，本公式集は，当初は円周率の計算法を書いた本の付録だったのだが，公式集だけ独立．なお円周率の計算法の本文の方はまったく完成してない．

ご意見・ご感想・間違いの指摘・円周率の公式の送り先は，matumoto@pluto.ai.kyutech.ac.jp までお願いします．

更新履歴

1995/10/10 頃 初版 Ver.2.7 作成．それ以降適時細かな修正を行っている．

1998/4/9 山田さんに新規公式を教えていただいた．また誤った式を指摘したいただきました．Quaric AGM 式のミス

誤: $\pi_n = \dfrac{2a_{n+1}^4}{1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k [a_k^4 - (\frac{a_k^2 + b_k^2}{2})^2]}$.，正: $\pi_n = \dfrac{2a_{n+1}^4}{1 - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k [a_k^4 - (\frac{a_k^2 + b_k^2}{2})^2]}$..

1999/2/27〜3/1 第 A 章「級数の高効率計算法」を追加．

1999/3/3 新公式を追加． 第 3 章「$\tan^{-1}$ 関係式一覧」を追加．第 B 章「計算機による円周率の計算記録」を追加修正．余白の多い式の多いページは 2 段組に変更．

1999/3/4 第 A 章「級数の高効率計算法」を修正．

1999/3/4〜16 暇を見付けては微修正．

1999/3/17 そろそろ疲れてきたので， Ver3.14 とする．

1999/4/14 第 3 節の $\tan^{-1}$ の式を主な式にのみ変更．

1999/5/2 第 4 章の「Ramanujan 型級数」を一応書き上げる．Ver.3.141 とする．

1999/5/5 第 3 章の「$\tan^{-1}$ 関係式の探し方」を追加．

1999/5/15 公開版作成．

1999/5/16 早速バグ修正.

2000/1/19 メールでバグを教えていただきました。3.4 節「既知の $\tan^{-1}$ 関係式の証明」の「tan の加法定理を使った方法」において、

誤：$\tan^{-1}\frac{24}{283}$, 正：$\tan^{-1}\frac{240}{238}$.

の間違いをしていました。御指摘ありがとうございます。

2000/2/18 細かな修正をいくつか。参考文献をいくつか追加。計算機による計算記録を更新。新しい計算ソフト pifast についての情報を追加。

2000/2/20 細かな修正をいくつか。参考文献をいくつか追加。Ramanujan 型級数の Type G, s=1/6 に関する新しい研究 [70] のコメントを追加.

2000/3/14 メールでバグと近似式を教えていただきました。

第 2 に新しい近似式を追加。$\log(262537412640768744)/\sqrt{163}$.

- 第 1.8 節で, 公式の収束の速さを表す数式で、2 次収束を示す数式として、
  $P(n^2)$ と書いていましたが、$P(2^n)$ が正しいです。同様の誤りを他に多数していました。
- 第**??**章で参考文献の誤り。

  誤：森氏他による,「基本的算法」〜, 正：野下氏他による,「基本的算法」〜.
- 表 6.2 において、$\sum$ の関数が二つ書いてありました。

2000/3/19 メールでバグを教えていただきました。第 1.1 節で、円周率の数値を誤っていました。

誤：$3.141519\cdots$. 正：$3.141592\cdots$.

御恥ずかしい。

2000/3/19 第 3 章の細かな修正をいくつか。

2000/5/4 「PC-9801 ユーザ」さんにメールで誤りを教えていただきました。第 1.2.7 節で、

誤: $1-2\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+2)}\right)$、正: $1-2\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}\right)$

他にも誤りを指摘されていますが、時間が無くて調べられていません。申し訳ありません。

2000/12/20 メールで誤りを教えていただきました。

第 1.9.5 節の「追記 (1998/3/1)」において、 $y := b^2$ の欠落。これは原論文の誤りです。

2002/8/20 メールで誤りを教えていただきました。

第 6 章の「数学記号」において、総和記号および総乗記号の例題の誤り。

2021/7/29 メールで誤りを教えていただきました。第 1.6.1 章の式 (b) の分母の「$8n+5$」は「$6n+5$」の誤り.

2021/8/14 書きかけの項目削除. リンク切れを修正. 第 3 章の奇素数/偶素数の定義は間違いのため修正. 第 6 章の「入手可能な円周率の高精度計算プログラム」および世界記録を修正加筆.

将来の予定 著者が亡くなると正式版となり Ver.π と命名される [1]..

[1] 元ネタはスタンフォード大学の..

謝辞

Mathematica を買ってくれた N 教授に感謝します (^^; ;.

関連図書

[1] 円周率関係書籍

[2] 平山諦, 改訂新版「円周率の歴史」, 大阪教育出版, 1980.
著者注： 入手困難．日本の和算家たちの円周率計算が載っている．

[3] ★ Petr Beckmann, “A History of PI.”, 1971.
(邦訳. 田尾陽一・清水韶光 訳, 「π の歴史」, 蒼樹書房, 1973 年)
著者注： 円周率の歴史に興味があるなら買って損は無いでしょう．一般向けの本です．

[4] ★ David Blatner, “The Joy of Pi”,Walker & Co, 1999, ISBN 0-802775624. (邦訳 麻尾敦則訳, 「π〔パイ〕の神秘」, アーティストハウス, 1999 年 7 月, ISBN4-901142-09-7, 1600 円.)

[5] ★ 野崎昭弘, 「π の話」, 岩波科学の本, 岩波書店, 1974, ISBN 4-00-115202-9.
著者注： 鹿児島県立図書館で借りた，著者が始めて読んだ円周率の本です．$\tan^{-1}$ の計算に使う級数の誘導法が一般の方にもわかるように解説されています．一般向け．1998 年に再版されています．

[6] Jonathan M.Borwein and Peter B.Borwein, “Pi and AGM - A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity”, Wiley, New York, 1987, ISBN 0-471-83138-7.
著者注： Borwein 兄弟による反復公式や Ramanujan 型級数の証明が載ってます．値段は一万円以上すると思います．本棚の飾りには最適．

[7] ★ 金田康正, 「π のはなし」, 東京図書, 1991 年, ISBN 4-489-00338-2.
著者注： 円周率の計算記録を何度も塗り変えられた金田先生による著書です．円周率の高精度計算の逸話などに興味がある人は一読の価値あり．一般向けの本です．

[8] Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein,
「PI: A Source Book」, Springer, 1996, ISBN 0-387-94924-0.
著者注： 古今東西の円周率の文献を集めた本です．値段は良く覚えてないが，近所の本屋で 1 万円前半で購入したと思います．英語です．円周率の研究するなら，一冊あって損は無いと思います．

[9] 大野栄一, 「パソコンで挑む円周率」, 講談社 (ブルーバックス 889), ISBN 4-06-132889-1.
著者注： BASIC による高精度計算のプログラムが載ってます．

[10] 猪口和則, 「π の公式をデザインする」, 新風舎, 1998, 1400 円, ISBN4-7974-0493-0.
著者注：自費出版のようです．通常の流通では注文に時間がかかるようです．出版社へ直接問い合わせる事をお勧めします．

文献 [32] による所の「連鎖探索法」を追求した本です．120 ページを使って $\tan^{-1}$ 関係式の様々な変形方法が述べられてます．この書籍に載っている数値は一部計算ミスがあります．プログラム中でオーバーフローを考慮していないようですね．検算してから使ってください．

[11] Robert Kanigel, ”THE MAN WHO KNEW INFINTY”, 1991.
(邦訳. 田中靖夫訳, 「無限の天才」, 工作舎, 1994, ISBN4-87502-239-5.)
著者注：多数の円周率の公式を発見した Ramanujan の伝記である.

[12] 鳴海風, 「円周率を計算した男」, 新人物往来社, 1998, 1800 円, ISBN4-404-02649-8.
著者注：本書は数学関係の書籍ではありません．和算家を題材にした歴史小説です.

[13] 堀場芳数, 「円周率 π の不思議」, 講談社 (ブルーバックス 797), ISBN 4-06-132797-6.

[14] 堀場芳数, 「対数 e の不思議」, 講談社 (ブルーバックス 862), ISBN 4-06-132862-X.

[15] 堀場芳数, 「無理数の不思議」, 講談社 (ブルーバックス 978), ISBN 4-06-132978-2.

[16] 数値計算関係書籍

[17] Donald E. Knuth, “The Art of Computer Programming”,
Volume 2, “Seminumerical Algorithms”, 2nd edition, Addison Wesley, 1981.
(邦訳. 中川圭介 訳, 「準数値算法, 算術演算」, サイエンス社, 1986 年)
著者注： 超高精度乗算を扱った文献で必ず参考文献に挙がっている本です．(内容をすべて理解できる人は，情報系の大学で修士号がラクラク取れるでしょう．積読や本棚の飾りには最適．)

[18] 野下浩平, 高岡忠雄, 町田元. 岩波講座 情報科学-10 「基本的算法」. 岩波書店. ISBN4-00-010160-9

[19] 森正武, 名取亮, 鳥居達生. 岩波講座 情報科学-18 「数値計算」. 岩波書店. ISBN4-00-010168-4

[20] 伊理正夫・藤野和建, 「数値計算の常識」, 共立出版, 1985 年, ISBN 4-320-01343-3.
著者注： 数値計算をするならとりあえず読め.

[21] 和田秀男, 「高速乗算法と素数判定法」, 上智大学講究録 No.15,1983 年 3 月.
著者注： Salamin Breant 公式の証明が載ってます．入手困難.

[22] ★ 小池慎一, 「C による科学技術計算」, CQ 出版, 1987 年, ISBN 4-7898-3032-2.
著者注： さまざまなバリエーションの FFT のコードが載ってます．最近新版が出たようですね．旧版では一箇所コードが間違っていた.

[23] ★ 安居院猛・中嶋正之, 「FFT の使い方」, 秋葉出版, エレクトロニクス選書 No.006, 1986 年, ISBN 4-87184-006-9.
著者注： FFT の参考書．持っていて損はない.

[24] ∗木田祐司, 「UBASIC 86 ユーザーズマニュアル」, 日本評論社.
著者注： 著者はこの本を持ってないのですが，UBASIC は，検算などにとても重宝するので参考までに.

[25] Murray R. Spiegel. マグロウヒル数学公式・数表ハンドブック. オーム社. ISBN4-274-13006-1.
著者注：π の公式がいくつか載ってます.

[26] 森本光生, 「パソコンによる解析入門」, 放送大学教育振興会, 1995, ISBN4-595-86421-3.
著者注： 例題に円周率関係の公式がたくさん出てきます.

[27] 村田健郎, 小国力, 唐木幸比古. 「スーパーコンピュータ– 科学技術計算への適用」. 丸善. ISBN4-621-02984-3
著者注：スーパーコンピュータ向けの $\tan^{-1}$ 関係式による計算プログラムが載ってます.

[28] 雑誌

[29] 柴田昭彦,「円周率 1000 万桁への歩み」, 数理科学, 1982 年 3 月, pp.65-73.

[30] 金田康正,「bit ナノピコ教室・世界記録をめざして」,
bit, 出題 1980 年 11 月 p.54, 解答 1981 年 2 月 pp.92-95, 続解答 1981 年 6 月 pp.101-103.

[31] 金田康正,「bit ナノピコ教室・$\pi/4$ と arctan との関係式」, bit, 出題 1982 年 6 月, 解答 1982 年 10 月 pp.102-109.

[32] 高野喜久雄,「π の arctangent relations を求めて」, bit, 1983 年 4 月, pp.83-91.

[33] ★ 金田康正,「ナノピコ教室が生んだ円周率世界記録」, bit, 1988 年 10 月, pp.4-15.

[34] ★ P.M. Borwein and P.B. Borwein, "Ramanujan and Pi", Sience American, Feb.1988, Vol.258, No.2, pp.66-73, (日本語版 「天才数学者ラマヌジャンと π」, 日経サイエンス, 1988 年 4 月, pp.88-98.)

[35] 数学セミナー 「特集 π」, 1989 年 3 月.

[36] 金田康正,「計算機による π の計算」, 数学セミナー, 1989 年 3 月, pp.12-18.

[37] 中村滋,「エレガントな解答をもとむ」(出題 1998 年 3 月号, 解答 1998 年 6 月号), 数学セミナー.
著者注：雑誌「数学セミナー」1998 年 3 月号の読者参加コーナの「エレガントな解答をもとむ」で，$\tan^{-1}$ 関係式の 2 項式は既知の 4 個しか存在しない事を証明する課題が出されました．6 月号で東京商船大学の中村滋先生により解答の解説が行なわれました．

[38] てふてふ,「PI.COM & PI386.COM ・円周率を 10 万桁計算する」, I/O, 1991 年 2 月, pp.181-183.

[39] 学術雑誌
学術雑誌は，一般図書館では入手困難． 情報系の学科/学部のある大学の附属図書館などで探してみてください．ほとんどの大学の附属図書館は，閲覧だけなら免許証などの身分証明があればできるはずです．

情報処理学会は雑誌を三つ出してます.「情報処理学会誌」,「情報処理学会論文誌」,「情報処理学会研究報告」. お間違えないように.「情報処理学会研究報告」はペラペラの薄い冊子です.

[40] 金田康正,「多倍長けた数の計算 —π の計算を中心として—」, 電子情報通信学会誌 Vol.72 No.10, pp.1085-1092 (1989 年 10 月)

[41] 高橋大介・金田康正,「多倍長平方根の高速計算法」, 情報処理学会研究報告 95-HPC-58,pp.51-56(1995).

[42] 高橋大介・金田康正,「分散メモリ型並列計算機による 2,3,5 基底の FFT の実現と評価」, 情報処理学会研究報告 96-HPC-62, pp.117-122(1996).

[43] 高橋大介・金田康正,「分散メモリ型並列計算機による高速多倍長計算」, 情報処理学会研究報告 96-HPC-60, pp.31-36(1996).

[44] ＊高橋大介・金田康正,「円周率—高速計算法と統計性 (3)」, 情報処理学会第 37 回プログラミングシンポジウム報告集, pp.73-84 (1996).

[45] 高橋大介・金田康正,「分散メモリ型並列計算機による円周率の高精度計算」, 情報処理学会研究報告 97-HPC-67, pp.19-24(1997).

[46] 高橋大介・金田康正, 「分散メモリ型並列計算機による 2,3,5 基底の FFT の実現と評価」, 情報処理学会論文誌 Vol.39 Np.3, pp.519-528(1998).

[47] 高橋大介・金田康正, 「分散メモリ型並列計算機による多倍長平方根の高速計算法」, 情報処理学会研究報告 96-HPC-63, pp.19-24 (1996).

[48] 高橋大介・金田康正, 「並列計算機における二次記憶を用いた一次元 FFT の実現と評価」, 情報処理学会研究報告 97-ARC-123, pp.7-12 (1997).

[49] 高橋大介・金田康正, 「多数桁の円周率を計算するための公式の改良：ガウス-ルジャンドル公式とボールウェインの 4 次の収束の公式」, 情報処理学会論文誌 Vol.38 No.11 , pp.2406-2409 (1997 年 11 月).

[50] 高橋大介・金田康正, 「分散メモリ計算機による円周率の 515 億桁計算」, 情報処理学会論文誌 Vol.39 No.7 , pp.2074-2083 (1998 年 7 月).

[51] 高橋大介・金田康正,「積和演算に向いた 8 基底 FFT Kernel の提案」, 情報処理学会研究報告 99-HPC-76, pp.55-60(1999).

[52] 小沢一文, 「平方根を近似する高次収束法」, 情報処理学会研究報告 89-NA-30 (1989).

[53] 小沢一文・海野啓明, 「多倍長浮動小数点の除算を高速に行なう方法—$O(n^2)$ のアルゴリズムに関して—」, 情報処理学会研究報告 90-NA-32 (1990).

[54] 小沢一文, 「多倍長浮動小数点のための平方根の高速計算法」, 情報処理学会論文誌 Vol.31 No.7, pp.953-963 (1990 年 7 月).

[55] 平山弘, 「FFT による多倍長数乗算法の誤差」, 情報処理学会研究報告 92-NA-40, pp.1-8(1992).

[56] 平山弘, 「FFT による高精度数の乗算」, 情報処理学会研究報告 97-HPC-65, pp.27-32(1996).

[57] 平山弘・浮川直章, 「連分数の高速評価法」, 情報処理学会研究報告 99-HPC-78, pp.25-30(1999).

[58] ★ 大浦拓哉, 「円周率公式の改良と高速多倍長計算の実装」, 情報処理学会研究報告 98-HPC-74, pp.25-30 (1998).
著者注：論文の著者のホームページ
(リンク修正 (2021/8/14) `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/index-j.html`)
には，FFT の設計資料があります．一読の価値あり．

[59] ＊大浦拓哉, 「円周率公式の改良と高速多倍長計算の実装」, 日本応用数理学会論文誌, Vol.9, No.4, pp.??-??(1999).

[60] 右田剛史・天野晃・浅田尚紀・藤野清次, 「級数の集約による多倍長数の計算法と π 計算への応用」, 情報処理学会研究報告 98-HPC-74, pp.31-36 (1998).

[61] 右田剛史・天野晃・浅田尚紀・藤野清次, 「級数の再帰約集約による多倍長数の計算法と π 計算への応用」, 情報処理学会論文誌 Vol.40 No.12, pp.4193-4200 (1999).

[62] 後保範・金田康正・高橋大介, 「無限級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法」, 京都大学　数理解析研究所講究録 No.1084 「数値計算における前処理の研究」, pp.60-71 (1999 年 2 月).

[63] Eugene Salamin, “Computation of π Using Arithmetic-Geometric Mean”, 初出調べる.
([8, pp.418-423] に掲載．)

[64] Richard P. Brent, “Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions”, 初出調べる.
([8, pp.424-433] に掲載．)

[65] Leonhard Euler, “Chapter 10 of Introduction to Analysis of the Infinite (On Use of the Discovered Fractions to Sum Infinite Series)”, 1748.
([8, pp.112-128] に掲載．)

[66] Srinivasa Ramanujan, “Modular Equations and Approximations to π”, 1914.
([8, pp.241-257] に掲載．)

[67] Herman C. Schelper, “The Chronology of PI”,1950.
([8, pp.282-305] に掲載．)

[68] J.M.Borwein, P.B.Borwein, “Class number three Ramanujan type series for $1/\pi$”, Journal of Computational and Applied Mathematics 46 (1993), pp.281-290.

[69] J.M.Borwein, P.B.Borwein “More Ramanujan-type series for 1/Pi”, in: “Ramanujan Revisited : Proceedings of the Centenary Conference”, George E.Andrews, Academic Press, 1988, pp.359-374.

[70] Heng Huat Chan, Wen-Chin Liaw “CUBIC MODULAR EQUATIONS AND NEW RAMANUJAN-TYPE SERIES FOR $1/\pi$”, 京都大学 数理解析研究所 講究録 No.1060 「数論とその応用」, pp.29-33 (1998 年 8 月).

[71] オンラインドキュメント

[72] ★ Peter Borwein, “Home Page For Peter Borwein”,
(`http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/`).
著者注：数々の π の公式を作った Peter Borwein 氏のホームページである．彼のホームページには，たくさんの π の論文が置いてある．π に興味ある人は一度訪れて損は無い．

[73] Peter Borwein, “On the Computation of Pi”, 1993,
(`http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/`).

[74] D.Bailey, P.Borwein, S.Plouff, “On the rapid computation of various polylogarithmic constants”, 1991, (`http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/` および [8, pp.663-676] に掲載．).

[75] ★ Jörg Arndt, “remarks on arithmetical algorithms and the computation of π”, 1997,
(`https://www.jjj.de/hfloat/`).
著者注：“hfloat” という数値計算パッケージ付属の文章である．多倍長計算のアルゴリズム，大量の円周率の公式，円周率の公式の探しかたなどが解説してある．一読の価値あり．

[76] J.M.Borwein, F.G.Garvan, “Approxiations to π via the Dedekind eta function”, 1996.
(`http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/`).

[77] PiHex, A distributed effort to calculate Pi.
(リンク修正 (2021/8/14) `http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/pihex/`).

[78] A new formula to compute the n'th binary digit of pi.
(リンク修正 (2021/8/14) https://bellard.org/pi/pi_bin/pi_bin.html).

[79] Fabrice Bellard's PI page.
(リンク修正 (2021/8/14) https://bellard.org/pi/).

[80] Victor Adamchik,Stan Wagon, "Pi: A 2000-Year Search Changes Direction".
(リンク切れ (2021/8/14) http://members.wri.com/victor/articles/pi/pi.html)

[81] Kirby Urner, ネットニュース sci.math "Subject: Yet another PI algorithm", 1995,
(Message-ID: <41531v$hn@maureen.teleport.com>)

[82] Bruno Haible, Thomas Papanikolaou, "Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers", Technical Report No. TI-7/97, Darmstadt University of Technology, 1997.
(リンク修正 (2021/8/14)
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.32.3698)

[83] 松元隆二, 「Arctan 関係式一覧」.
(リンク修正 (2021/8/14) http://www.pluto.ai.kyutech.ac.jp/~matumoto/syumi.html).

[84] 松元隆二, 「Ramanujan 型級数一覧」.
(リンク修正 http://www.pluto.ai.kyutech.ac.jp/~matumoto/syumi.html).

注記

- 始めに「★」が付いている文献は，著者お勧め.
- 始めに「∗」が付いている文献は，著者が読んだ事がないのだが，役にたちそうなので載せてある.
- 情報処理学会研究報告で,「NA」は数値解析の略,「ARC」はコンピュータアーキテクチャの略,「HPC」はハイパフォーマンスコンピューティングの略.